Приближенные методы квантовой теории поля и концепция прямолинейных путей при высоких энергиях

С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян, М. А. Смондырев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики

В работе формулируется ряд приближенных методов вычисления функциональных интегралов, которые могут быть использованы для нахождения функций Грина и амплитуд рассеяния в квантовой теории поля. Развивается также операторный метод нахождения приближенных решений квазипотенциальных уравнений. Показывается, что при высоких энергиях предложенные методы являются различными реализациями концепции прямолинейных путей.

1. В последнее время методы теории меры и интегрирования в функциональных пространствах широко используются в работах по квантовой теории поля. Этот подход основан на представлении решений точных уравнений теории в виде функциональных интегралов [1,2]. Однако в силу отсутствия развитой техники вычисления достаточно общих квадратур функциональные интегралы являются „вещью в себе" в том смысле, что обычно извлечение необходимой информации приходится проводить поэтапно с помощью той или иной аппроксимационной процедуры. Наиболее просты и известны такие аппроксимационные процедуры, при которых на каждом этапе вычислений мы имеем дело лишь с гауссовыми квадратурами. Так, при исследовании проблемы инфракрасных асимптотик функций Грина в квантовой электродинамике для вычисления функциональных интегралов были предложены некоторые приближенные методы [3,4], соответствующие, в частности, на языке диаграмм Фейнмана такой модификации пропагаторов нуклонов, согласно которой отбрасываются члены типа $k_i k_j$, где k_i и k_j есть импульсы различных реальных и виртуальных мезонов, испущенных нуклоном. Например,

$$\frac{1}{\left(p-\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2-m^2} \to \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i^2-2p\sum_{i=1}^{n} k_i}. \tag{1,1}$$

В дальнейшем (см., например, [5—8]) эти методы были развиты и с успехом применены для исследования процессов упругого и неупругого рассеяния частиц при высоких энергиях. Исходя из фейнмановской интерпретации амплитуды как суммы по путям, авторы этих работ показали, что приближение типа $k_i k_j=0$ эквивалентно учету путей, наиболее близко приближающихся в случае высоких энергий к отрезкам прямых, имеющих направление импульсов частиц до и после рассеяния, соответственно.

В настоящей статье предлагается ряд аппроксимационных процедур, идейно связанных с приближениями, которые использовались в работах [3—8]. Рассматриваются также некоторые применения предложенных приближенных методов в области высоких энергий и фиксированных передач импульса. Интерес к этому вопросу стимулирован тем обстоятельством, что имеются веские основания говорить о доминировании в указанной асимптотической области траекторий частиц наименее отклоняющихся от прямолинейных путей [6]. Примером тому служит полученное в квантовой теории поля в рамках квазипотенциального уравнения совпадение точного решения с решением, учитывающим лишь прямолинейные траектории. Анализ изложенных в данной работе приближений показывает, что они при высоких энергиях и фиксированных передачах импульса являются, по сути дела, реализациями концепции прямолинейных путей. Следует подчеркнуть, что выбор того или иного приближенного метода нужно сделать, исходя из конкретной постановки задачи с учетом определенной кинематической области.

2. Рассмотрим функциональный интеграл по гауссовой мере

$$\int \frac{\delta\nu}{\mathrm{const}}\, e^{-i\int d\xi \nu^2(\xi)}\, e^{g\pi[\nu]}, \tag{2.1}$$

где $\pi[\nu]$ — некий функционал, а const обозначает нормировочную постоянную. Как известно, вычисление (2.1) может быть сведено к нахождению функциональных производных в соответствии с формулой

$$\int [\delta\nu]\, e^{g\pi[\nu]} = \exp\left\{\frac{1}{4i}\int d\xi \frac{\delta^2}{\delta\nu^2(\xi)}\right\} e^{g\pi[\nu]}\Big|_{\nu=0}. \tag{2.2}$$

Кроме того, в некоторых задачах квантовой теории поля (см., например [11]) требуется определить действие дифференциального оператора exp $\left\{\frac{i}{\cdot}\int D \frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\right\}$, где

$$\int D \frac{\delta^2}{\delta\nu^2} = \int d\xi_1 d\xi_2 D(\xi_1, \xi_2) \frac{\delta^2}{\delta\nu(\xi_1)\delta\nu(\xi_2)},$$

а $D(\xi_1, \xi_2)$ — функция типа пропагатора. Имея в виду дальнейшие приложения, мы объединим обе задачи следующим образом. Требуется найти функционал $\Pi[\nu]$ из соотношения

$$e^{\Pi[\nu]} = \exp\left\{\frac{i}{2}\int D \frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\right\} e^{g\pi[\nu]} \equiv \overline{e^{g\pi[\nu]}}, \tag{2.3}$$

где $\pi[\nu]$ — заданный функционал, а D — функция двух переменных. В случае, когда

$$D = -\frac{1}{2}\delta(\xi_1 - \xi_2), \tag{2.4}$$

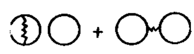
значение функционала $\Pi[\nu]$ при $\nu = 0$ определяет согласно формуле (2.2) функциональный интеграл. Для упрощения записи действие дифференциального оператора будет обозначаться в некоторых случаях знаком усреднения как в (2.3).

Для наглядности введем графические обозначения

$\pi[\nu] \rightarrow$ , $\quad \frac{i}{2}\int D \frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\pi \rightarrow$ ,

$$\exp\left\{\frac{i}{2}\int D\,\frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\right\}\pi[\nu]=\bar{\pi}\qquad\rightarrow \tag{2.5}$$ 

В этих обозначениях, например,

$$\frac{i}{2}\int D\,\frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\,\pi^2[\nu]\rightarrow 2\left\{\qquad\right\},$$ 

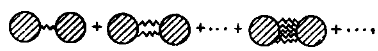
где первые два члена в обычной терминологии будем называть несвязными графами. Подчеркнем, что хотя графы (2.5) и имеют очевидную аналогию с графами Фейнмана, во многих случаях их внешний вид не будет иметь ничего общего с обычными фейнмановскими диаграммами.

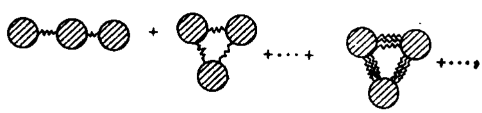
Предположим теперь, что структура функционала $\pi[\nu]$ такова, что имеется параметр малости, связанный с петлей. В этом случае существует аппроксимационная процедура, которую мы назовем корреляционной и согласно которой ищем функционал $\Pi(\nu)$ в виде ряда

$$\Pi=\sum_{n=1}^{\infty}g^n\Pi_n\,. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.3), немедленно получаем

$$\Pi_1=\bar{\pi}\rightarrow$$ 

$$\Pi_2=\frac{1}{2}\left(\overline{\pi^2}-\bar{\pi}^2\right)\rightarrow$$ 

$$\Pi_3=\frac{1}{3!}\left[\overline{\pi^3}-\bar{\pi}^3-3\bar{\pi}\left(\overline{\pi^2}-\bar{\pi}^2\right)\right]\rightarrow \tag{2.7}$$ 

. . . .

$$\Pi_n=\frac{1}{n!}\,\overline{\pi^n}\Big|_{\substack{\text{связная}\\ \text{часть}}}\,.$$

Рассматривая графики (2.7), убеждаемся, что корреляционный метод действительно соответствует разложению по числу петель, причем в Π_n дает вклад лишь связная часть суммы всех графов с n петлями.

Обрывая ряд (2.6), мы получаем приближенное выражение для функционала Π. Это приближение справедливо, если для любых $n\geq 2$ выполняется неравенство

$$\overline{\pi^n}\Big|_{\substack{\text{связная}\\ \text{часть}}}\ll\overline{\pi^n}\Big|_{\substack{\text{несвязная}\\ \text{часть}}}\,. \tag{2.8}$$

В этом случае при разложении e^{Π} в ряд по степеням g учет лишь Π_1 дает нам главные члены в каждом порядке, доучет Π_2 — поправки к ним и т. д

С корреляционной процедурой тесно связано разложение вида

$$\overline{e^{g\pi}}=e^{g\bar{\pi}}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\overline{(\pi-\bar{\pi})^n}\right]. \tag{2.9}$$

Такое разложение встречалось в работах [4,5]. Оно имеет в общем ту же область применимости, что и корреляционное приближение, и отличается от него тем, что дает меньшее число поправочных членов в каждом порядке по g. Заметим, однако, что высшие поправочные члены в корреляционном разложении имеют, на наш взгляд, более простой геометрический смысл (2.7), что облегчает в некоторой степени его использование.

Как было отмечено выше, рассмотренные приближения хороши, когда существует параметр малости, связанный с петлей. Может случиться и так, что в теории имеется малый параметр, связанный с линией, т. е. возникающий при варьировании функционала $\pi[\nu]$. Тогда возможно провести разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Представляя π в виде

$$\pi[\nu]=\int d\eta\,\widetilde{\pi}[\eta]\,e^{-i\int\eta(\xi)\nu(\xi)d\xi} \tag{2.10}$$

и подставляя (2.10) в соотношение (2.3), получаем

$$e^{\Pi_\varepsilon[\nu]}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g}{n!}\int\prod_{j=1}^{n}\{\delta\eta_j\,\widetilde{\pi}[\eta_j]\}\cdot e^{-i\int\nu\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)-\frac{i}{2}\int D\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\right)}\,e^{-i\varepsilon\int D\left(\sum_{i<j}\eta_i\eta_j\right)}, \tag{2.11}$$

где членам с разными η приписан параметр малости ε, причем $\Pi[\nu]=\Pi_\varepsilon[\nu]$ при $\varepsilon=1$.

Функционал $\Pi_\varepsilon[\nu]$ ищем в виде

$$\Pi_\varepsilon=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\Pi_{n+1}. \tag{2.12}$$

Ограничиваясь лишь несколькими первыми членами ряда (2.12), мы приходим к приближению, которое назовем $\eta_i\eta_j$-приближением.

Вычисления приводят к следующим выражениям для первых членов:

$$\Pi_1=g\overline{\pi}\rightarrow$$  ,

$$\Pi_2=\frac{ig^2}{2}\int D\left(\frac{\delta\overline{\pi}}{\delta\nu}\right)^2\rightarrow \tag{2.13}$$  ,

$$\Pi_3=\frac{g^2}{2i}\int D_{13}D_{24}\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu_1\delta\nu_2}\left\{\frac{1}{2i}\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu_3\delta\nu_4}+g\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu_3}\frac{\delta\overline{\pi}}{\delta\nu_4}\right\}\rightarrow$$  ,

где цифры означают порядок свертки, т. е.

$$\int D_{13}D_{24}\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu_1\delta\nu_2}\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu_3\delta\nu_4}\equiv\int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4\cdot D(\xi_1,\xi_3)D(\xi_2,\xi_4)\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu(\xi_1)\delta\nu(\xi_2)}\frac{\delta^2\overline{\pi}}{\delta\nu(\xi_3)\delta\nu(\xi_4)}$$

и т. д.

Таким образом, мы действительно получили разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Так как мы имеем дело со связными графами, числа таких линий k и петель n связаны неравенством

$$k \geq n-1. \tag{2.14}$$

Это ведет к тому, что сумма первых n членов $\eta_i\eta_j$ — приближения содержится в аналогичной сумме корреляционного приближения, т. е. область применимости первого из них не шире, чем второго. Применение его, однако, может существенно упростить выкладки, так как при этом нет необходимости иметь дело с суммой

Отметим также, что первые члены во всех рассмотренных приближениях совпадают, а различия появляются лишь при вычислении поправок. Это обстоятельство является отражением того факта, что рассмотренные методы в применении к вычислению высокоэнергетической амплитуды рассеяния представляют различные варианты приближения прямолинейных путей [6].

3. Рассмотрим применение развитых выше методов для конкретного примера амплитуды рассеяния двух скалярных нуклонов в модели $L_{\text{int}} = g:\psi^2\varphi:$, которая в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума представима в виде [5]

$$f(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int dx D(x)\, e^{-ix(p_1-q_1)} \int_0^1 d\lambda \cdot S_\lambda(x; q_1, q_2; p_1, p_2) + (q_1 \leftrightarrow q_2), \tag{3.1}$$

где

$$S_\lambda = \int [\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ ig^2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau D \left[-x + 2\xi_1 a_1(\xi) - 2\tau a_2(\tau) - 2\int_{-\xi}^{0} d\eta\, \nu_1(\eta) + 2\int_{-\tau}^{0} d\eta\, \nu_2(\eta) \right] \right\} \overset{\text{def}}{=} \int [\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty} e^{ig^2\lambda\pi}, \tag{3.2}$$

$$a_{1,2}(\xi) = p_{1,2}\vartheta(\xi) + q_{1,2}\vartheta(-\xi). \tag{3.3}$$

Будем искать асимптотику функционального интеграла S_λ при больших энергиях $s = (p_1 + p_2)^2$ и фиксированных передачах импульса $t = (p_1 - q_1)^2$. Проведенные вычисления показывают, что в этом случае с петлями связан параметр $1/s$, а с линиями $1/\sqrt{s}$ [1], так что благодаря соотношению (2.14) в n-ном порядке по g^2 для величины S_λ при фиксированном $x \neq 0$ главный член будет иметь асимптотику $1/s^n$, а следующая поправка $1/s^n\sqrt{s}$. Таким образом, если мы хотим вычислить лишь два первых асимптотических члена в каждом порядке по g^2, удобно применить $\eta_i\eta_j$-приближение, обобщенное для

[1] Напомним, что речь идет о петлях и линиях, определяемых правилами (2.5).

двух функциональных переменных ν_1 и ν_2, причем достаточно использовать приближение $e^{\Pi_2}=1+\Pi_2+\cdots$ — по типу разложения (2.9). Итак, приближенная формула для S_λ имеет вид

$$S_\lambda \simeq e^{ig^2\lambda\bar{\pi}}\left[1+\frac{i\lambda^2 g^4}{4}\int d\eta \sum_{i=1,2}\left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta\nu_i(\eta)}\right)^2\right]_{\nu=0}. \tag{3.4}$$

Проводя соответствующие вычисления в указанной асимптотической области, для S_λ получаем

$$S_\lambda \simeq e^{-\frac{ig^2\lambda}{4\pi s}K_0(\mu|\mathbf{x}_\perp|)}\Big\{1-\frac{ig^2\lambda\mu}{4\pi s\sqrt{s}}\frac{\mathbf{\Delta}_\perp \mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}_\perp|}\cdot[(x_0+x_z)\vartheta(-x_0-x_z)$$
$$+(x_z-x_0)\vartheta(x_0-x_z)]K_1(\mu|\mathbf{x}_\perp|)+\frac{g^2\lambda\mu^2}{8\pi s\sqrt{s}}[|x_0+x_z|+|x_0-x_z|]K_0(\mu|\mathbf{x}_\perp|)$$
$$-\frac{ig^4\lambda^2\mu^2}{32\pi^2 s^2\sqrt{s}}[|x_0+x_z|+|x_0-x_z|]K_1^2(\mu|\mathbf{x}_\perp|)\Big\}, \tag{3.5}$$

где K_0 и K_1 являются функциями Мак-Дональда нулевого и первого порядка и определяются выражениями

$$K_0(\mu|\mathbf{x}_\perp|)=\frac{1}{2\pi}\int d^2\mathbf{k}_\perp \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp}}{\mathbf{k}_\perp^2+\mu^2};\ K_1(\mu|\mathbf{x}_\perp|)=-\frac{\partial K_0(\mu|\mathbf{x}_\perp|)}{\partial(\mu|\mathbf{x}_\perp|)}, \tag{3.6}$$

а $\mathbf{\Delta}_\perp^2=-t$.

В выражении (3,5) множитель перед фигурной скобкой соответствует эйкональному поведению амплитуды рассеяния, а члены в скобке определяют поправки относительной величины $1/\sqrt{s}$. Интересно отметить появление в поправочных членах зависимости от x_0 и x_z, т. е. возникновение так называемых эффектов запаздывания.

Проводя аналогичные вычисления, можно убедиться, что все последующие члены достаточно быстро убывают по сравнению с выписанными. Однако стоит подчеркнуть, что это отнюдь не означает доказательства справедливости в очерченных рамках эйконального представления для амплитуды рассеяния. Дело в том, что коэффициентные функции в асимптотическом разложении, выражающиеся через функции Мак-Дональда, сингулярны на малых расстояниях, причем эта сингулярность усиливается по мере роста скорости убывания соответствующего члена при больших s. Следовательно, интегрирование величины S_λ в соответствии с формулой (3.1) при нахождении амплитуды рассеяния может привести, вообще говоря, к появлению членов, нарушающих в высших порядках по g^2 эйкональный ряд. На возможность появления таких экстрачленов в отдельных порядках теории возмущений в моделях типа φ^3 было указано в работах [12, 13].

В рассматриваемом нами примере мы имеем дело с сингулярным взаимодействием, приводящим в пренебрежении радиационными эффектами к потенциалу юкавского типа, требующему особой осторожности.

Отметим в этой связи, что в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля имеется строгое обоснование эйконального представления на основе предположения о гладкости локального квазипотенциала.

4. Учитывая вышесказанное, изложим следующий приближенный метод, который мы назовем операторным, в применении к квазипотенциальному уравнению.

Рассмотрим квазипотенциальное уравнение с локальным квазипотенциалом для амплитуды рассеяния скалярных частиц

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = gV(\mathbf{p}-\mathbf{p}'; s) + g\int d\mathbf{q}K(\mathbf{q}^2, s)V(\mathbf{p}-\mathbf{q}; s)T(\mathbf{q}, \mathbf{p}'; s), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — относительные импульсы частиц в системе центра масс в начальном и конечном состояниях, соответственно, а

$$s = 4(\mathbf{p}^2+m^2) = 4(\mathbf{p}'^2+m^2).$$

Для решения уравнения (4.1) сделаем Фурье-преобразование

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{p}'; s) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}} V(\mathbf{r}; s), \tag{4.2}$$

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}\, T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s). \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.1), получим

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \frac{g}{(2\pi)^3}\, V(\mathbf{r}; s)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4.4}$$
$$+\frac{g}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}K(\mathbf{q}^2; s)V(\mathbf{r}; s)\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\int d\mathbf{r}''\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}T(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; s).$$

Вводя представление

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \frac{g}{(2\pi)^3}\, V(\mathbf{r}; s)\, F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s), \tag{4.5}$$

имеем

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4.6}$$
$$+\frac{g}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}K(\mathbf{q}^2; s)\, e^{-i\,\mathbf{q}\mathbf{r}}\int d\mathbf{r}''\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}''}V(\mathbf{r}''; s)\, F(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; s).$$

Определим псевдодифференциальный оператор

$$\hat{L}_{\mathbf{r}} = K(-\nabla_{\mathbf{r}}^2; s). \tag{4.7}$$

Тогда

$$K(\mathbf{r}; s) = \int d\mathbf{q}\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, K(\mathbf{q}^2; s) = \hat{L}_{\mathbf{r}}\, (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \tag{4.8}$$

С учетом соотношения (4.8) уравнение (4.6) можно переписать в символической форме

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + g\hat{L}_{\mathbf{r}}\,[V(\mathbf{r}; s)\, F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s)]. \tag{4.9}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, e^{W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; s)}\, e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.9), получим уравнение для функции

$$e^{W(\mathbf{r}\,;\,\mathbf{k}\,;\,s)} = 1 + g\hat{L}_{\mathbf{r}}\,[V(\mathbf{r}\,;s)\,e^{W(\mathbf{r}\,;\,\mathbf{k}\,;\,s)-i\mathbf{kr}}]\,e^{i\mathbf{kr}}. \tag{4.11}$$

Используя идею модифицированной теории возмущений в экспоненте [3], функцию $W(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s)$ запишем в виде разложения в ряд по константе связи g

$$W(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n W_n(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s). \tag{4.12}$$

Тогда из уравнения (4.11) следуют выражения для функций

$$W_1(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s) = \int d\mathbf{q}\,V(\mathbf{q}\,;s)\,K[(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2;s]\,e^{-i\mathbf{qr}}, \tag{4.13}$$

$$W_2(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s) = -\frac{W_1^2(\mathbf{r}\,;\mathbf{k}\,;s)}{2} + \frac{1}{2}\int d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2\,e^{-i\mathbf{q}_1\mathbf{r}-i\mathbf{q}_2\mathbf{r}}\;V(\mathbf{q}_1\,;s) \tag{4.14}$$

$$\cdot\,V(\mathbf{q}_2\,;s)K[\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{k})^2;s]\{K[(\mathbf{q}_1+\mathbf{k})^2;s]+K[(\mathbf{q}_2+\mathbf{k})^2;s]\}$$

и т. д.

Ограничиваясь рассмотрением лишь W_1 вместо W в формуле (4.10), мы получаем из (4.10), (4.15) и (4.3) следующее приближенное выражение для амплитуды рассеяния

$$T_1(\mathbf{p},\mathbf{p}'\,;s) = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{r}\,e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}}\,V(\mathbf{r}\,;s)\,e^{gW_1(\mathbf{r}\,;\,\mathbf{p}'\,;\,s)}. \tag{4.15}$$

Чтобы пояснить смысл сделанного приближения, разложим в ряд по константе связи g

$$T_1^{(n+1)}(\mathbf{p},\mathbf{p}'\,;s) = \frac{g^{n+1}}{n!}\int d\mathbf{q}_1\ldots d\mathbf{q}_n V(\mathbf{q}_1\,;s)\ldots V(\mathbf{q}_n\,;s) \tag{4.16}$$

$$\cdot\,V\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{q}_i\,;s\right)\prod_{i=1}^{n}K[\mathbf{q}_i+\mathbf{p}')]^2;s]$$

и сравним с $(n+1)$-ым итерационным членом точного уравнения (4.1).

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p},\mathbf{p}'\,;s) = \frac{g^{n+1}}{n!}\int d\mathbf{q}_1\ldots d\mathbf{q}_n V(\mathbf{q}_1\,;s)\ldots V(\mathbf{q}_n\,;s)V(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{4.17}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{q}_i\,;s)\sum_{p}K[\mathbf{q}_1+\mathbf{p}')^2;s]K[(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{p}')^2;s]\ldots K\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{q}_i+\mathbf{p}'\right)^2;s\right],$$

где $\sum_p$ — сумма по перестановкам импульсов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Из (4.16) и (4.17) легко видеть, что сделанное приближение в случае уравнения Липпмана-Швингера совпадает с так называемым приближением $\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j=0$, согласно которому в „нуклонных пропагаторах“ отбрасываются члены типа $\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j(i\neq j)$.

Полученное приближенное решение может быть использовано для нахождения асимптотик в области $s\to\infty$ и фиксированном t. При этом оказывается, что в рамках развитого здесь операторного метода в асимптотических выражениях нетрудно наряду с главным учесть и следующие поправочные члены. Так, в случае квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе для гладких потенциалов легко получить известное выражение [14]

$$(4.18)\qquad T(t,s) \underset{\substack{s\to\infty\\ t-\text{фикс.}}}{=} \frac{s}{(2\pi)^3}\int d^2\mathbf{r}_\perp e^{i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp}\, \frac{e^{\frac{2ig}{s}\int_{-\infty}^{\infty} dz V\left(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z^2};\, s\right)}-1}{2i}$$

$$-\frac{6g^2}{(2\pi)^3 s\sqrt{s}}\int d^2\mathbf{r}_\perp e^{i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp}\, e^{\frac{2ig}{s}\int_{-\infty}^{\infty} dz' V\left(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};\, s\right)}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z^2};s)$$

$$-\frac{ig}{(2\pi)^3\sqrt{s}}\int d^2\mathbf{r}_\perp e^{i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp}\int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ e^{\frac{2ig}{s}\int_{z}^{\infty} dz' V\left(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};\, s\right)} \right.$$

$$\left. - e^{\frac{2ig}{s}\int_{-\infty}^{\infty} dz' V\left(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};\, s\right)} \right\} \left\{ \int_{z}^{\infty} dz' \nabla_\perp^2 V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};s)\right.$$

$$\left. +\frac{2ig}{s}\left[\int_{z}^{\infty} dz' \nabla_\perp V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};s)\right]^2\right\} - \frac{ig}{(2\pi)^3\sqrt{s}}\,\mathbf{\Delta}_\perp^2$$

$$\cdot\int d^2\mathbf{r}_\perp e^{i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp}\int_{-\infty}^{\infty} z\,dz\, V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z^2};s)\; e^{\frac{2ig}{s}\int_{z}^{\infty} dz' V\left(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2+z'^2};\, s\right)}.$$

Легко видеть, что первый член в этой формуле описывает эйкональное поведение амплитуды рассеяния, а все остальные определяют к нему поправочные члены относительной величины $1/\sqrt{s}$.

Авторы искренне благодарны академику Н. Н. Боголюбову и профессору А. Н. Тавхелидзе за внимание к работе, ценные советы и замечания. Мы имели возможность обсуждать вопросы, затронутые в работе с Б. М. Барбашовым, Р. П. Зайковым, А. В. Ефремовым, В. Г. Кадышевским, И. Т. Тодоровым, за что приносим им свою благодарность. Один из нас (С. К.) выражает свою глубокую признательность академику Х. Я Христову, а также участникам семинаров по теоретической физике Физического института БАН и Софийского университета за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Feynman, R. P. — Rev. Mod. Phys., **20** (1947), 376.
2. Боголюбов, Н. Н. — ДАН СССР, **99** (1954), 225
3. Фрадкин, Е. С. — Тр. ФИАН, **29** (1965), 7.
4. Барбашов, Б. М. — ЖЭТФ, **48** (1965), 607.
5. Барбашов, Б. М., С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян. — ТМФ, **3** (1970), 342.
6. Barbashov, B. M., S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, B. N. Pervushin, A. N. Sissakian, A. N. Tavkhelidze. — Phys. Lett., **33B** (1970), 484.
7. Barbashov, B. M., S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakian, A. N. Tavkhelidze. — Nuovo Cimento, **4A** (1971), 182.
8. Kuleshov, S. P., V. A. Matveev, A. N. Sissakian, M. A. Smondyrev. — JINR, E2-5833, Dubna (1971).
9. Logunov, A. A., A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento, **29** (1963), 380.
   Кадышевский, В. Г., А. Н. Тавхелидзе. —В.: Проблемы теоретической физики, посвященном 60-летию Н. Н. Боголюбова. М., Наука, 1969.
10. Blokhintsev, D. I. — Nucl. Phys., **31** (1962), 628.
    Alliluyev, S. P., S. S. Gershtein, A. A. Logunov. — Phys. Lett., **18** (1965), 195.
11. Kuleshov, S. P., V. A. Matveev, A. N. Sissakian, M. A. Smondyrev.—JINR, E2-5897, Dubna (1971).
12. Tiktopoulos, G., S. Treiman. Preprint of Prineceton University (1970).
13. Барбашов, Б. М., В. В. Нестеренко. — ТМФ, **4** (1970), 293.
14. Гарсеванишвили, В. Р., С. В. Голоскоков, В. А. Матвеев, Л. А. Слепченко, А. Н. Тавхелидзе. — ТМФ, **6** (1971), 36.

Поступила в редакцию 2 января 1974

Approximate Methods of the Quantum Field Theory and the Conception of Straight-Line Paths at High Energies

S. P. Kouleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakyan, M. A. Smondirev

(Summary)

A number of approximate methods for calculaton of the functional integrals which can be used to find the Green functions and the scattering amplitudes in quantum field theory are formulated. The operator method of solving the quasipotential equations is developed. It is shown that in high energies these methods are the different versions of the conception of straight-line paths.