ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ПО ФИЗИКЕ

ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

СУХУМИ 1972г.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев
Объединённый институт ядерных исследований

§ I. Введение

В свете тех трудностей, с которыми столкнулась квантовая теория поля при описании сильных взаимодействий, существенный интерес представляют попытки разработать приближённые схемы для описания процессов в асимптотических областях на базе методов, выходящих за рамки теории возмущений. Одним из таких методов является подход, основанный на представлении решений точных уравнений квантовой теории поля в виде функциональных интегралов/I/. Метод функционального интегрирования в квантовой теории впервые был предложен Р.Фейнманом/2/ и в дальнейшем развит и с успехом применён в работах Н.Н.Боголюбова/3/, С.Эдвардса и Р.Пайерлса/4/, Е.С.Фрадкина/5/, Б.М.Барбашова/6/ и других работах.

Этот метод является красивым и привлекательным своей возможной физической интерпретацией/2/. Будучи впервые применённым к задачам квантовой механики, он как бы проложил мост между классическими и квантовыми представлениями о движении и соударении частиц. Ведь, как известно, решение любого классического уравнения может быть представлено в виде интеграла по траектории частицы. Однако в квантовой теории не существует привычного понятия траектории для микрообъекта, и с этим фактом связана воображаемая пропасть между классическими и квантовыми объектами. Метод функционального интегрирования предоставил возможность для трактовки решений квантовых уравнений как интегралов по множеству траекторий.

Метод функционального интегрирования оказался очень удобным для нахождения замкнутых выражений для полных функций Грина, включающих радиационные поправки. Представление функций Грина через функциональные интегралы было использовано при рассмотрении вопросов градиентных преобразований электродинамических функций Грина, при исследовании модели Блоха-Нордсика и др./1/.

Несмотря на успехи и перспективность функциональных методов в квантовой теории поля, надо отметить ряд нерешённых принципиальных вопросов в этой области. Трудность связана в основном с тем, что отсутствует развитая техника вычисления функциональных квадратур, отличных от гауссовых или приводящихся к ним путем замены функциональных переменных.

Эта трудность, в частности, находит своё выражение в том, что в моделях квантовой теории поля функциональным методом не удаётся учесть вклады в амплитуду рассеяния замкнутых нуклонных петель, так как из-за того, что поляризационный оператор $\Pi(\varphi)$ сложным образом зависит от поля φ, взять функциональный интеграл по полю не удаётся. В последнее время делаются попытки в рамках функционального интегрирования разработать приближённые методы для учёта некоторого класса замкнутых петель/7/, однако, по-прежнему этот вопрос представляется очень трудным. Тем не менее, именно с развитием и применением к различным задачам теории поля приближённых подходов, основанных на методах функционального интегрирования, связаны в последние годы успехи этого направления. Для исследования инфракрасных особенностей сечений рассеяния методом функционального интегрирования Е.С. Фрадкиным/5/ и Б.М. Барбашовым/6/ были предложены различные по технике методы аппроксимации функциональных интегралов для функций Грина в электродинамике. Эти аппроксимации в литературе часто называют "приближением $k_i k_j = 0$ " в электродинамике, потому что после взятия в таком приближении функциональных квадратур в функциях распространения отбрасываются члены типа $\sum_{i \neq j} k_i k_j$

$$\frac{1}{(p-\sum_{i=1}^{n} k_i)^2 - m^2} \longrightarrow -\frac{1}{2p\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} k_i^2},$$

где k_i и k_j – импульсы различных квантов поля.

Приближение $k_i k_j = 0$ было в дальнейшем использовано для нахождения в моделях теории поля асимптотического поведения амплитуд и сечений рассеяния в области высоких энергий и фиксированных передач импульса. Одним из результатов, достигнутых в этом направлении на базе указанного приближения, является вывод в моделях квантовой теории поля известного эйконального представления для амплитуды рассеяния /8/. Эйкональное представление, беря своё идейное начало ещё из оптики, получило широкое распространение в задачах рассеяния быстрых частиц на ядрах. В нерелятивистской квантовой механике это представление может быть получено из уравнения Шредингера при условиях, что потенциал взаимодействия гладкий, де'бройлевская длина волны частицы много меньше эффективного радиуса действия потенциала $\lambda = \frac{1}{k} \ll R$, а также $\frac{|V|}{E} \ll 1$, что эквивалентно рассмотрению относительно малых углов рассеяния.

Недавно выяснилось, что при теоретическом анализе экспериментальных данных по рассеянию частиц высоких энергий может быть с успехом применено указанное эйкональное представление для амплитуды рассеяния на малые углы /9/. В этой связи встала проблема обоснования справедливости эйконального приближения в квантовой теории поля для описания рассеяния частиц в области релятивистских энергий.

Отметим, что в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля нахождение амплитуды рассеяния сводится к решению квазипотенциального уравнения. Как было показано в работе /10/, эйкональное представление для амплитуды рассеяния может быть получено как решение квазипотенциального уравнения [11] при условии гладкости локального квазипотенциала [12].

Таким образом, работы по эйкональному приближению в квазипотенциальном подходе обозначили те основные вехи, роль и место которых было весьма интересно выяснить на базе стандартных теоретико-полевых моделей. Это, во-первых, вопрос о возможности эйконального представления для амплитуды рассеяния, построенной эффективным суммированием графов Фейнмана. И, во-вторых, - это выяснение статуса гладкости квазипотенциала в моделях теории поля.

При решении этих вопросов на основе методов функционального интегрирования в квантовой теории поля было развито <u>приближение прямолинейных путей</u>. Этот метод, тесно связанный с известным в электродинамике приближением $k_i k_j = 0$, имеет в своей сути предположение о том, что при высоких энергиях основной вклад в функциональные интегралы дают пути частиц, близкие к классическим траекториям.

Развитию метода приближения прямолинейных путей и его связи с релятивистским эйкональным представлением для амплитуды рассеяния и посвящена настоящая лекция.

§ 2. Представление амплитуд рассеяния в виде континуальных интегралов по путям

Для простоты мы рассмотрим модель скалярных нуклонов, взаимодействующих со скалярным мезонным полем, описываемую лагранжианом взаимодействия $L_{I} = g :\psi^2\varphi: .$

Одночастичная функция Грина нуклона в заданном внешнем скалярном поле $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\Box + m^2 - g\varphi(x)]\, G(x,y|\varphi) = \delta(x-y). \qquad (2.1)$$

Формальное решение уравнения (2.I) может быть представимо в виде континуального интеграла[6], при этом фурье-образ функции Грина имеет следующий вид:

$$G(p,q|\varphi) = \int d^4x\, d^4y\, e^{ipx-iqy} G(x,y|\varphi) = i\int_0^\infty d\tau\, e^{i\tau(p^2-m^2)} \cdot$$
$$\cdot \int d^4x\, e^{ix(p-q)} \int [\delta\nu]_0^\tau \exp\left\{ ig\int_0^\tau d\xi\, \varphi\left[x+2p\xi+2\int_0^\xi \nu(\eta)\,d\eta\right]\right\}, \tag{2.2}$$

где

$$[\delta\nu]_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{\delta\nu \exp\left[-i\int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu^2(\eta)\,d\eta\right]}{\int \delta\nu \exp\left[-i\int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu^2(\eta)\,d\eta\right]} \tag{2.3}$$

и $\delta\nu$ есть элемент объёма функционального пространства четырехмерных функций $\nu(\eta)$, заданных на отрезке $\tau_1 \leq \eta \leq \tau_2$.

Используя выражение (2.2), мы можем найти функцию Грина двух нуклонов

$$G(p_1,p_2;q_1,q_2) = \left[\exp\frac{i}{2}\int \mathcal{D}\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\right] G(p_1,q_1|\varphi)\, G(p_2,q_2|\varphi)\, S_0(\varphi)\Big|_{\varphi=0}, \tag{2.4}$$

где

$$\left[\exp\frac{i}{2}\int \mathcal{D}\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\right] \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x_1\, d^4x_2\, \mathcal{D}(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1)\,\delta\varphi(x_2)}\right] \tag{2.5}$$

и $S_0(\varphi)$ есть среднее значение S-матрицы по флуктуациям нуклонного вакуума в присутствии внешнего скалярного поля φ. Известно, что $S_0(\varphi)$ может быть представлена в виде:

$$S_0(\varphi) = \exp\left[i\,\Pi(\varphi)\right], \tag{2.6}$$

где функционал $\Pi(\varphi)$ соответствует сумме связанных диаграмм, содержащих одну замкнутую нуклонную петлю с произвольным числом концов внешнего мезонного поля.

Введём обозначения

$$\int j_i \varphi \equiv \int dz\, \varphi(z)\, j(x_i - z;\, p_i,\, \tau_i / \nu_i)\,, \quad i = 1, 2; \tag{2.7}$$

где

$$j(x_i - z;\, p_i;\, \tau_i / \nu_i) = \int_0^{\tau_i} d\xi\, \delta\left[x_i - z + 2p_i \xi + 2\int_0^{\xi} \nu_i(\eta)\, d\eta\right]. \tag{2.8}$$

Используя эти обозначения, представим выражение для функции Грина двух нуклонов (2.4) в следующей форме:

$$G(p_1, p_2;\, q_1, q_2) = i^2 \int_0^{\infty} d\tau_1\, d\tau_2\, e^{i\tau_1(p_1^2 - m^2) + i\tau_2(p_2^2 - m^2)} \int d^4x_1\, d^4x_2 \cdot$$

$$\cdot\, e^{ix_1(p_1 - q_1) + ix_2(p_2 - q_2)} \int [\delta\nu_1]_0^{\tau_1} [\delta\nu_2]_0^{\tau_2}\, \mathcal{E}(x_{1,2};\, p_{1,2};\, \tau_{1,2} / \nu_{1,2}), \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{E} = \left[\exp \frac{i}{2} \int \mathcal{D} \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\right] e^{ig\int \varphi (j_1 + j_2)}\, S_0(\varphi) \Big|_{\varphi = 0} \tag{2.10}$$

Для величины $\mathcal{E}$ нетрудно получить следующее выражение /13/:

$$\mathcal{E} = \exp\left[-\frac{ig^2}{2}\int \mathcal{D}(j_1+j_2)^2 - g\int \mathcal{D}(j_1+j_2)\frac{\delta}{\delta\varphi}\right] e^{i\Pi(\varphi)}\Big|_{\varphi=0} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{ig^2}{2}\int \mathcal{D}(j_1+j_2)^2 + i\Pi\left[-g\int \mathcal{D}(j_1+j_2)\right]\right\}, \tag{2.11}$$

где

$$e^{i\Pi(\varphi)} = \left[\exp\frac{i}{2}\int \mathcal{D}\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\right] S_0(\varphi), \tag{2.12}$$

т.е. функционал $\Pi(\varphi)$ соответствует сумме всех связных диаграмм с произвольным числом замкнутых нуклонных петель и внешних мезонных концов при учёте всех возможных внутренних мезонных спариваний.

Разлагая величину (2.11) в ряд по константе связи и подставляя её в формулу (2.9), мы получим после выполнения простых функциональных интеграций по ν_i обычный неперенормируемый ряд теории возмущений для функции Грина двух частиц.

Рассмотрим более подробно структуру величины $\mathcal{E}$. Вычисления приводят к следующему представлению:

$$\mathcal{E} = e^{i\Pi(0)}\, \mathcal{E}^{(1)}\mathcal{E}^{(2)}\mathcal{E}^{(12)}, \tag{2.13}$$

где

$$\mathcal{E}^{(i)} = \exp\left[-\frac{ig^2}{2}\int \mathcal{D}_i^* j_i^2\right], \quad i=1,2, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{E}^{(12)} = \exp\left[-ig^2\int \mathcal{D}_{12}^* j_1 j_2\right]. \tag{2.15}$$

Здесь использованы обозначения

$$\mathcal{D}_i^* = 2\int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\gamma\, \mathcal{D}\left(x_1, x_2 \Big| -g\gamma\int \mathcal{D} j_i\right), \quad i=1,2; \tag{2.16}$$

$$\mathcal{D}_{12}^* = \int_0^1 d\gamma_1 \int_0^1 d\gamma_2\, \mathcal{D}(x_1, x_2 | -g\gamma_1 \int \mathcal{D} j_1 - g\gamma_2 \int \mathcal{D} j_2) \tag{2.17}$$

а $\mathcal{D}(x_1, x_2 | \varphi)$ – полная функция Грина мезонного поля в присутствии внешних источников.

Отметим, что $\mathcal{D}_i^*$ представляет собой функцию Грина мезонного поля, взаимодействующего с внешним источником j_i, соответствующим i-ому нуклону, а $\mathcal{D}_{12}^*$ является функцией Грина мезонного поля, взаимодействующего одновременно с обоими нуклонами.

Таким образом, величина $\mathcal{E}$, определяющая функцию Грина двух нуклонов, факторизуется на множители, которые представляют соответственно взаимодействие между двумя нуклонами, радиационные поправки и перенормировку вакуума. Этим важным фактором мы воспользуемся в дальнейшем.

Определим теперь амплитуду рассеяния двух нуклонов через двухчастичную функцию Грина с помощью выражения

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\, i F(p_1, p_2; q_1, q_2) =$$
$$= \lim_{p_i^2, q_i^2 \to m^2} \prod_{i=1,2} (p_i^2 - m^2)(q_i^2 - m^2)\, G(p_1, p_2; q_1, q_2). \tag{2.18}$$

Подставляя в формулу (2.18) соотношения (2.9), (2.13) и (2.15), после соответствующих выкладок получаем окончательное выражение для амплитуды рассеяния двух нуклонов

$$F(p_1, p_2; q_1, q_2) = \int [\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(1)}(p_1, q_1 | \nu_1) \int [\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(2)}(p_2, q_2 | \nu_2) \cdot$$
$$\cdot g^2 \int d^4x\, e^{ix\Delta} \mathcal{D}_{12}^*(x; p_i, q_i | \nu_i) \int_0^1 d\lambda\, e^{-i\lambda g^2 \int \mathcal{D}_{12}^* j_1 j_2}, \tag{2.19}$$

где

$$\Delta = (p_1 - q_1) = -(p_2 - q_2), \quad z = x_1 - x_2 . \tag{2.20}$$

Все величины, входящие в выражение (2.19), являются функционалами источников

$$j_i \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \delta\left[x_i - z + 2p_i \xi \, \vartheta(\xi) + 2q_i \xi \, \vartheta(-\xi) + 2\int_0^{\xi} \nu_i(\eta) d\eta\right]. \tag{2.21}$$

Отметим, что выражение (2.21) определяет скалярную плотность точечной классической частицы, движущейся вдоль криволинейной траектории $x_i(s)$, зависящей от собственного времени $s = 2m\xi$ и удовлетворяющей уравнению

$$m \frac{dx_i(s)}{ds} = p_i \vartheta(\xi) + q_i \vartheta(-\xi) + \nu_i(\xi) \tag{2.22}$$

при условии $x_i(0) = x_i , \quad i = 1, 2$.

По этой причине представление (2.19) для амплитуды рассеяния можно рассматривать как континуальную сумму по всем возможным путям нуклонов в процессе рассеяния.

Остановимся вкратце на физическом смысле функциональных переменных ν_1 и ν_2 . Введённые формально при получении решения для функции Грина эти переменные описывают отклонение траектории частицы от прямолинейного пути. Действительно, при $\nu = 0$ уравнение (2.22) описывает классическую траекторию частицы, движущейся с импульсом p при $s > 0$ и с импульсом q при $s < 0$.

Опираясь на квантовомеханическую аналогию, следует ожидать, что существует определённая кинематическая область, в которой доминирующий вклад в амплитуду рассеяния вносят пути частиц, наиболее близко приближающихся к классическим. Очевидно, такой областью является область асимптотически больших энергий, в которой начальные и конечные импульсы p_i и q_i мало отличаются друг от друга, если эффективный потенциал взаимодействия не слишком сингулярен в нуле.

Заметим, однако, что приближение $\nu = 0$ оказывается заведомо неприменимым при собственных временах частицы s, близких к нулю, когда классическая траектория частицы меняет направление. В самом деле, при $\nu = 0$ ток перехода имеет следующий вид

$$j(k; p_i, q_i | 0) = -\left(\frac{1}{2kp_i + i0} - \frac{1}{2kq_i - i0}\right). \tag{2.23}$$

На языке диаграмм Фейнмана это равносильно пренебрежению в нуклонных пропагаторах квадратичной зависимостью от переданного импульса k, т.е.

$$\frac{1}{m^2 - (p + \sum_{i=1}^{n} k_i)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2p\sum_{i=1}^{n} k_i},$$

что может привести к появлению расходимостей интегралов по d^4k на верхнем пределе.

Ввиду этого необходимо развить математический аппарат, позволяющий учитывать не только классическую траекторию частицы, но и другие траектории, лежащие вблизи неё, что устранит указанную выше трудность.

§ 3. Приближение прямолинейных путей и асимптотическое поведение амплитуд рассеяния частиц при высоких энергиях

Как известно, вычисление функциональных интегралов может быть сведено к нахождению функциональных производных. В связи с этим математическая постановка нашей задачи выглядит следующим образом.

Требуется найти функционал $\Pi[\nu]$ из соотношения

$$e^{\Pi[\nu]} = \exp\left[\frac{i}{2}\int \mathcal{D}\frac{\delta^2}{\delta\nu^2}\right] e^{g\pi[\nu]} \equiv \overline{e^{g\pi[\nu]}}, \tag{3.1}$$

где $\pi[\nu]$ – заданный функционал, а $\mathcal{D}$ - некая функция двух переменных. Функционал $\Pi[\nu]$, вообще говоря, произволен. Однако для наглядности мы будем считать, что $\Pi[\nu]$ имеет такой же физический смысл, как и в формуле (2.6).

Предположим теперь, что структура функционала $\pi[\nu]$ такова, что имеется параметр малости, связанный с нуклонной петлёй. В этом случае существует аппроксимационная процедура, которую мы назовём корреляционной и согласно которой ищем функционал $\Pi[\nu]$ в виде ряда

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Pi_n . \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \overline{\pi}, \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2}\left(\overline{\pi^2} - \overline{\pi}^2\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_n &= \frac{1}{n!}\,\overline{\pi^n}\Big|_{\substack{\text{связная}\\ \text{часть}}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, мы убеждаемся, что корреляционный метод действительно соответствует разложению по числу замкнутых нуклонных петель, причём в Π_n даёт вклад лишь связная часть суммы всех графов с n петлями.

Обрывая ряд (3.2), мы получаем приближённое выражение для функционала Π. Это приближение справедливо, если для любых $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\overline{\mathcal{T}^n}\Big/_{\substack{\text{связная}\\ \text{часть}}} \ll \overline{\mathcal{T}^n}\Big/_{\substack{\text{несвязная}\\ \text{часть}}} . \tag{3.4}$$

В этом случае при разложении e^{Π} в ряд по степеням g учёт лишь Π_1 даёт нам главные члены в каждом порядке, доучёт Π_2 – поправки к ним и т.д.

Как было выше отмечено, рассмотренное приближение применимо, когда существует параметр малости, связанный с петлёй. Может случиться и так, что в теории имеется малый параметр, связанный с линией, т.е. возникающий при варьировании функционала $\mathcal{T}[\nu]$. Тогда возможно провести разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Представляя $\mathcal{T}$ в виде:

$$\mathcal{T}[\nu] = \int d\eta\, \tilde{\mathcal{T}}[\eta]\, e^{-i\int \eta(\xi)\nu(\xi)\, d\xi} \tag{3.5}$$

и подставляя (3.5) в соотношение (3.I), получаем

$$e^{\Pi_\varepsilon[\nu]} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int \prod_{j=1}^{n} \{\delta\eta_j\, \tilde{\mathcal{T}}[\eta_j]\} \cdot e^{-i\int \nu\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j\right) - \frac{i}{2}\int \mathcal{D}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j^2\right) - i\varepsilon\int\mathcal{D}\left(\sum\limits_{i<j}\eta_i\eta_j\right)}, \tag{3.6}$$

где членам с разными η приписан параметр малости ε, причём $\Pi[\nu] = \Pi_\varepsilon[\nu]$ при $\varepsilon = 1$.

Функционал $\Pi_\varepsilon[\nu]$ ищем в виде

$$\Pi_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Pi_{n+1} . \tag{3.7}$$

Ограничиваясь лишь несколькими первыми членами ряда (3.7), мы приходим к приближению, которое назовём " $\eta_i \eta_j$ -приближением".

Вычисления приводят к следующим выражениям для первых членов

$$\Pi_1 = g\bar{\mathcal{T}},$$
$$\Pi_2 = \frac{ig^2}{2}\int \mathcal{D}\left(\frac{\delta\bar{\mathcal{T}}}{\delta\nu}\right)^2 \qquad (3.8)$$

и т.д.

Таким образом, мы действительно получили разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Так как мы имеем дело со связными графами, числа таких линий k и петель n связаны неравенством

$$k \geq n-1. \qquad (3.9)$$

Это ведет к тому, что сумма n членов $\eta_i \eta_j$ - приближения содержится в аналогичной сумме корреляционного приближения, т.е. область применимости первого из них не шире, чем второго. Применение его, однако, может существенно упростить выкладки. Отметим также, что первые члены в рассмотренных приближениях совпадают, а различия появляются лишь при вычислении поправок. Это обстоятельство является отражением того факта, что рассмотренные методы в применении к вычислению высокоэнергетической амплитуды рассеяния представляют различные варианты приближения прямолинейных путей. Другими словами, в случае рассеяния нуклонов высоких энергий основной член амплитуды рассеяния, вычисленный в рамках изложенных аппроксимационных процедур, учитывает распределённые по гауссовому закону вклады всевозможных траекторий частиц, что означает доминирование путей частиц, наименее отклоняющихся от прямолинейных.

Рассмотрим теперь применение развитых выше методов для конкретного примера амплитуды рассеяния двух нуклонов, которая , как легко видеть из результатов § 2, в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума имеет следующий вид:

$$F(p_1,p_2;q_1,q_2)=\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\,\mathcal{D}(x)\,e^{ix(p_1-q_1)}\int_0^1 d\lambda\,\cdot$$
$$\cdot\,S_\lambda(x;p_1,p_2;q_1,q_2)+(p_1\longleftrightarrow p_2), \tag{3.10}$$

где

$$S_\lambda=\int[\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty}[\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{ig^2\lambda\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\mathcal{D}\big[-x+2\xi a_1(\xi)-$$
$$-2\tau a_2(\tau)-2\int_{-\xi}^{0}d\eta\,\nu_1(\eta)+2\int_{-\tau}^{0}d\eta\,\nu_2(\eta)\big]\Big\}\stackrel{def}{=}\int[\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty}[\delta\nu]_{-\infty}^{\infty}e^{ig^2\lambda\bar{\mathcal{I}}}, \tag{3.11}$$

$$a_{1,2}(\xi)=p_{1,2}\,\vartheta(\xi)+q_{1,2}\,\vartheta(-\xi). \tag{3.12}$$

Будем искать асимптотику функционального интеграла S_λ при больших энергиях $s=(p_1+p_2)^2$ и фиксированных передачах импульса $t=(p_1-q_1)^2$, удерживая наряду с главным и следующий поправочный член в каждом порядке по g^2. Оказывается, что в этом случае удобно применить $\eta_i\eta_j$ – приближение, обобщённое для двух функциональных переменных ν_1 и ν_2. Тогда приближённая формула для S_λ имеет вид:

$$S_\lambda\simeq e^{ig^2\lambda\bar{\mathcal{I}}}\Big[1+\frac{i\lambda^2 g^4}{4}\int d\xi\sum_{i=1,2}\Big(\frac{\delta\bar{\mathcal{I}}}{\delta\nu_i(\eta)}\Big)^2\Big]\Big|_{\nu=0}. \tag{3.13}$$

Исходя из формулы (3.11) для S_λ, мы получаем следующее выражение для $\bar{\mathcal{I}}$:

$$\bar{\pi}\Big|_{\nu=0} = \frac{1}{(2\pi)^4 s}\int d^4k\, \mathcal{D}(k)\, e^{-ikx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\tau\,\cdot$$
$$\cdot\, e^{2ik\left[\xi\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{s}} - \tau\frac{a_2(\tau)}{\sqrt{s}}\right]}\cdot e^{i\frac{k^2}{\sqrt{s}}(|\xi|+|\tau|)}. \qquad (3.14)$$

аналогично получаем

$$\frac{i\lambda^2 g^4}{4}\int d\eta\left[\left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta\nu_1(\eta)}\right)^2+\left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta\nu_2(\eta)}\right)^2\right]\Big|_{\nu=0} = -\frac{i\lambda^2 g^4}{(2\pi)^8 s^2}\int d^4k_1\, d^4k_2\,\cdot$$
$$\cdot\,\mathcal{D}(k_1)\,\mathcal{D}(k_2)\, e^{-ix(k_1+k_2)}(k_1k_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi_1\, d\tau_1\, d\xi_2\, d\tau_2\,\cdot$$
$$\cdot\,\exp\left\{2ik_1\left[\xi_1\frac{a_1(\xi_1)}{\sqrt{s}} - \tau_1\frac{a_2(\tau)}{\sqrt{s}}\right] + i\frac{k_1^2}{\sqrt{s}}(|\xi_1|+|\tau_1|)\right\}\cdot$$
$$\exp\left\{2ik_2\left[\xi_2\frac{a_1(\xi_2)}{\sqrt{s}} - \tau_2\frac{a_2(\tau)}{\sqrt{s}}\right] + i\frac{k_2^2}{\sqrt{s}}(|\xi_2|+|\tau_2|)\right\}\cdot \qquad (3.15)$$
$$\cdot\,\frac{1}{\sqrt{s}}\left[\Phi(\xi_1,\xi_2) + \Phi(\tau_1,\tau_2)\right],$$

где

$$\Phi(\xi_1,\xi_2) = \theta(\xi_1\xi_2)\left[|\xi_1|\,\theta(|\xi_2|-|\xi_1|) + |\xi_2|\,\theta(|\xi_1|-|\xi_2|)\right] \qquad (3.16)$$

Вычисляя асимптотику выписанных интегралов, получаем искомую формулу для S_λ /14/

$$S_\lambda \simeq e^{-\frac{ig^2\lambda}{4\pi s}K_0(\mu|\vec{x}_\perp|)}\left\{1 - \frac{ig^2\lambda\mu}{4\pi s\sqrt{s}}\,\frac{\vec{\Delta}_\perp\vec{x}_\perp}{|\vec{x}_\perp|}\,\cdot\right.$$
$$\cdot\left[(x_0+x_z)\,\theta(-x_0-x_z) + (x_z-x_0)\,\theta(x_0-x_z)\right]K_1(\mu|\vec{x}_\perp|) +$$
$$+\frac{g^2\lambda\mu^2}{8\pi s\sqrt{s}}\left(|x_0+x_z| + |x_0-x_z|\right)K_0(\mu|\vec{x}_\perp|) - \qquad (3.17)$$
$$\left.-\frac{ig^4\lambda^2\mu^2}{32\pi^2 s^2\sqrt{s}}\left(|x_0+x_z|+|x_0-x_z|\right)K_1^2(\mu|\vec{x}_\perp|)\right\},$$

где K_0 и K_1 являются функциями Мак-Дональда нулевого и первого порядка и определяются выражениями

$$K_0(\mu|\vec{x}_\perp|) = \frac{1}{2\pi}\int d^2\vec{k}\,\frac{e^{i\vec{k}_\perp\vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2+\mu^2}\,;\quad K_1(\mu|\vec{x}_\perp|) = -\frac{\partial K_0(\mu|\vec{x}_\perp|)}{\partial(\mu|\vec{x}_\perp|)} \tag{3.18}$$

В выражении (3.18) множитель перед фигурной скобкой соответствует эйкональному поведению амплитуды рассеяния, а члены в скобке определяют поправки относительной величины $1/\sqrt{s}$. Как известно из исследования амплитуды рассеяния в рамках диаграммной техники Фейнмана, высокоэнергетическая асимптотика может содержать лишь логарифмы и целые степени s. Аналогичное явление наблюдается и здесь, ибо интегрирование выражения (3.17) для величины S_λ в соответствии с формулой (3.10) приводит к исчезновению коэффициентов при полуцелых степенях s. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\int dx_0\,dx_z\,\mathcal{D}(x)\,f(x_0-x_z) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2\vec{k}_\perp\,\frac{e^{-i\vec{k}_\perp\vec{x}_\perp}}{\vec{k}_\perp^2+\mu^2-i\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(x_0-x_z)\,f(x_0-x_z)\,\delta(x_0-x_z) =$$
$$= -\frac{K_0(\mu|\vec{x}_\perp|)}{2\pi}\,f(0) = 0, \tag{3.19}$$

если функция $f(x_0-x_z)$ обращается в нуль при $x_0 = x_z$. Тем не менее, учёт членов, содержащих полуцелые степени s, необходим для вычисления следующих поправок в амплитуде рассеяния, которые можно получить, проводя аналогичные вычисления.

Интересно отметить появление в поправочных членах зависимости от x_0 и x_z, т.е. возникновение так называемых эффектов запаздывания, отсутствующих в главном асимптотическом члене.

Анализируя выражение (3.17), мы видим, что коэффициентные функции в асимптотическом разложении, выражающиеся через функции Мак-Дональда, сингулярны на малых расстояниях, причём эта сингулярность будет усиливаться по мере роста скорости убывания соответствующего члена при больших S . Следовательно, интегрирование величины S_λ в соответствии с формулой (3.10) при нахождении амплитуды рассеяния может привести, вообще говоря, к появлению членов, нарушающих в высших порядках по g^2 эйкональный ряд. На возможность появления таких экстрачленов в отдельных порядках теории возмущений в моделях типа φ^3 было указано в работе /15/.

Как уже отмечалось во введении, в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля имеется строгое обоснование эйконального представления на основе предположения о гладкости локального квазипотенциала. В рассматриваемом же нами примере мы имеем дело с сингулярным взаимодействием, приводящим в пренебрежении радиационными эффектами и поляризацией вакуума к эффективному квазипотенциалу юкавского типа, требующему особой осторожности.

Литература:

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. "Введение в теорию квантованных полей", ГИТТЛ, М. (1957).
2. R.P. Feynman. Rev. Mod. Phys., 20,376 (1947).
3. Н.Н. Боголюбов. ДАН СССР, 99, 225 (1954).
4. S.F.Edwards,R.E.Peierls. Proc. Roy. Soc., A224,24 (1954).
5. Е.С. Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7 (1965).
6. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
7. B.M.Barbashov,S.P.Kuleshov,V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian.JINR,E2-5827,Dubna (1971).
8. Б.М. Барбашов, С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян. ТМФ, 3, 342 (1970).
9. В.Р. Гарсеванишвили, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко. ЭЧАЯ, 5, 91, "Атомиздат", М. (1970).

10. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Phys. Lett., 29B, 191 (1969).
11. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).
12. D.I.Blokhintsev. Nucl. Phys., 31, 628 (1962); S.P.Alliluyev, S.S.Gershtein, A.A.Logunov. Phys. Lett., 18, 195 (1965).
13. V.A.Matveev, A.N.Tavkhelidze. JINR, E2-5851, Dubna (1971).
14. С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев. ОИЯИ, Р2-6445, Дубна (1972).
15. G.Tiktopoulos, S.Treiman. Preprint of Princeton University (1970).