

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ В ФИЗИКЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

Павлина Атанасова

atanasova@uni-plovdiv.bg

Пловдивский университет, Болгария

соавторы: [Т.Л. Бояджиев](#), Е.В. Земляная, Ю.М. Шукринов

DIAS-TH, 30 января - 6 февраля 2011 г.



Brian David Josephson

Содержание доклада

- **Численные методы и алгоритмы** для исследования нелинейных параметрических задач физики
- Численное исследование длинных **джозефсоновских контактов, описываемых двойным уравнением sine-Gordon**
- Численное исследование **двухслойных симметричных джозефсоновских контактов**

Численные методы и алгоритмы для исследования нелинейных параметрических задач физики

Нелинейность:

Применяется **непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН)**^{a,b}

^aI.V. Puzynin, etc, Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (JINR, Dubna, 1999) v. 30, No 1, p. 97.

^bI. V. Puzynin, etc, Physics of Particles and Nuclei, 2007, Vol. 38, No. 1, pp. 70–116.

Многопараметричность:

Используется схема **продолжения по параметрам** через точку поворота^a

^aE.V. Zemlyanaya and I.V. Barashenkov, Mat. Model. 16(10), 3(2004).

Численные методы и алгоритмы для исследования нелинейных параметрических задач физики

Устойчивость:

Для **анализа устойчивости** каждому распределению ставится в соответствие спектральная задача Штурма-Лиувилля, обращение в ноль минимального собственного значения которой отвечает бифуркация по одному из параметров задачи.

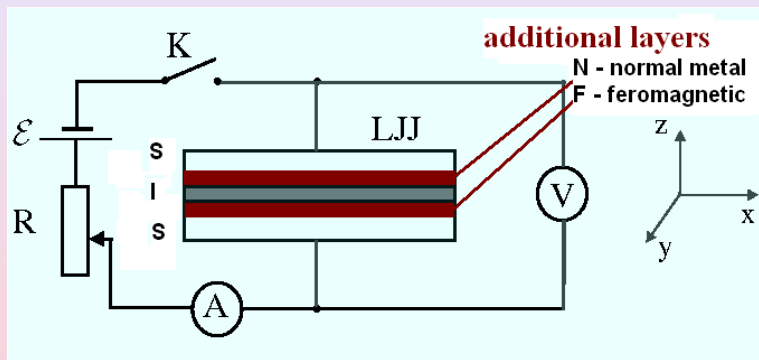
Бифуркации:

Используется эффективная численная схема **моделирования бифуркационных зависимостей** равновесных решений широкого класса уравнений физических моделей. ^a

^aБояджиев, Т.Л. Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики, Дисс. на соиск. уч. степени д.ф.м.н., Дубна, 2002.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ
КОНТАКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ
ДВОЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ
SINE-GORDON

Statement of the physical problem



Long Josephson junction scheme
 S – superconductor, I – insulator;
 N – normal metal; F – ferromagnetic

Mathematical model

Double sine-Gordon equation for magnetic flux static distributions in JJ

$$-\varphi'' + J_z(\varphi) - \gamma = 0, \quad x \in (-l; l),$$

$$\varphi'(\pm l) = h_e.$$

- function $\varphi = \varphi(x)$ — magnetic flux along x-axis;
- $J_z(\varphi)$ — Josephson current density;
 - when $J_z(\varphi) = \sin \varphi$ — sine-Gordon equation – traditional case;
- when $J_z(\varphi) = a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi$ — **double sine-Gordon equation**;
 - $p = (l, h_e, \gamma, a_1, a_2)$ — problem parameters set.

Statement of the physical problem

Dimensionless physical parameters

- l — halflength of the junction;
- h_e — external magnetic field;
- γ — external current;
- a_1, a_2 — parameters depending on the method of junction preparing^{1,2}.

Mathematical model

Sturm-Liouville problem

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad (1)$$

$$\psi'(\pm l) = 0, \quad (2)$$

where $q(x) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$ — SLP potential.

$$\lambda_{min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Stability condition:

- $\lambda_{min} > 0$ — solution $\varphi(x, p)$ is stable;
- $\lambda_{min} < 0$ — solution $\varphi(x, p)$ is unstable;
- $\lambda_{min} = 0$ — corresponds to a bifurcation of the solution $\varphi(x, p)$ at model parameters p variation.

Results and discussion

Some solutions in the traditional case (only the first harmonic, i.e. $a_1 = 1, a_2 = 0$)

Trivial solutions

When $h_e = 0$ and $\gamma = 0 \rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow$

- $\varphi = 0$ — Meissner M_0 — stable
- $\varphi = \pi$ — π -Meissner M_π — unstable

Fluxon solutions

- $\varphi(x) = 4 \arctan e^{\pm x}$ — fluxon solution Φ^1 or antifluxon solution Φ^{-1} in finite interval at $h_e = 0$ and $\gamma = 0^a$.

^aGalpern, Yu.S., Filippov, A.T.: Joint solution states in inhomogeneous Josephson junctions. Sov. Phys. JETP. vol. 59, p. 894 (in Russian) (1984)

Results and discussion

Existence of new constant solutions $M_{\pm ac}$ –

$$\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$$

At $h_e = 0$ and $\gamma = 0$

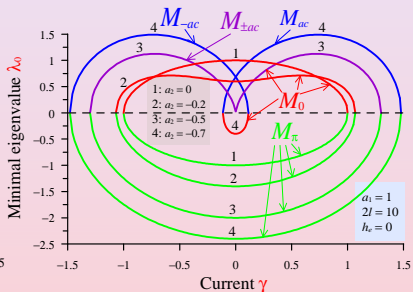
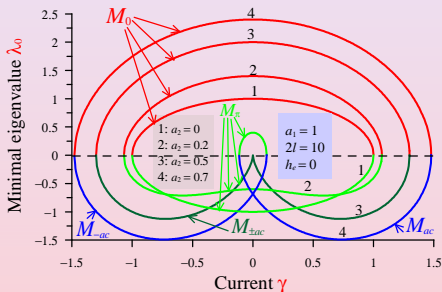
$$a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi (a_1 + 2a_2 \cos \varphi) = 0$$

- $\varphi = 0$ – trivial Meissner solution M_0 ;
- $\varphi = \pi$ – π -Meissner M_π ;
- $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$ at $|a_1/a_2| \leq 2$ and $a_2 \neq 0$ – $M_{\pm ac}$.

Results and discussion

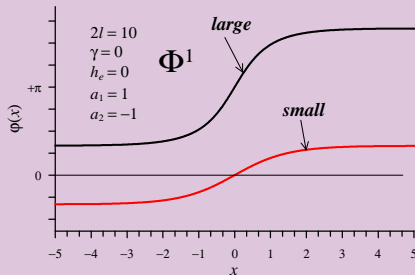
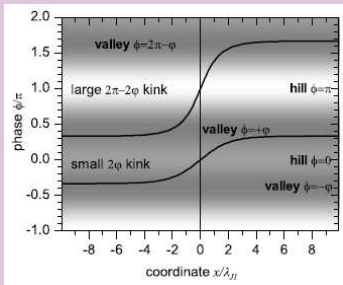
Creation of stable states M_π and $M_{\pm ac}$ at $|a_2| > 0.5$



Change of $\lambda_0(\gamma)$ for CS with increase $a_2 \geq 0$ and with decrease $a_2 \leq 0$ at $h_e = 0$, $a_1 = 1$, $2l = 10$.

Results and discussion

Large and small fluxons when $a_2 < -0.5$

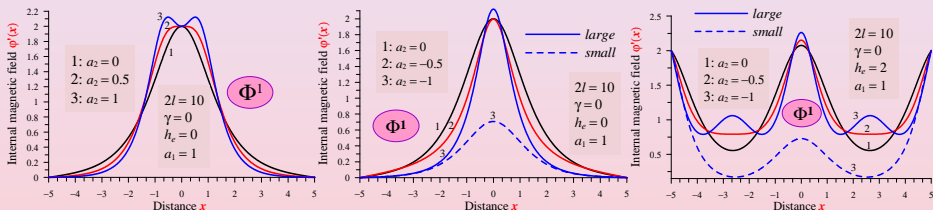


Left panel - fig. from Goldobin, E., Koelle, D., Kleiner, R., and Buzdin, A. Phys. Rev. B. vol. 76, p. 224523 (2007)

Right panel - our numerical result

Results and discussion

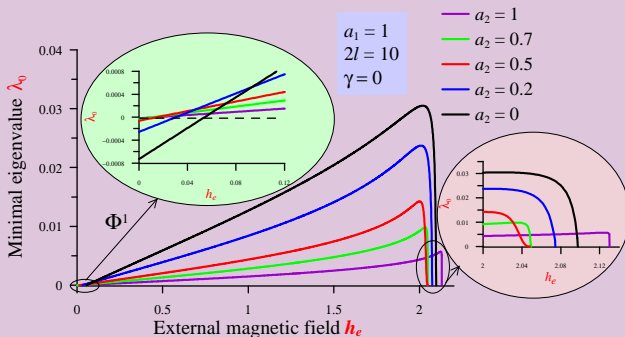
Deformation of the one-fluxon solution Φ^1 by changing of the parameter a_2



Internal magnetic field for the distribution Φ^1 at $2l = 10$, $\gamma = 0$, $h_e = 0$ and $a_1 = 1$ when a_2 is changing.

Results and discussion

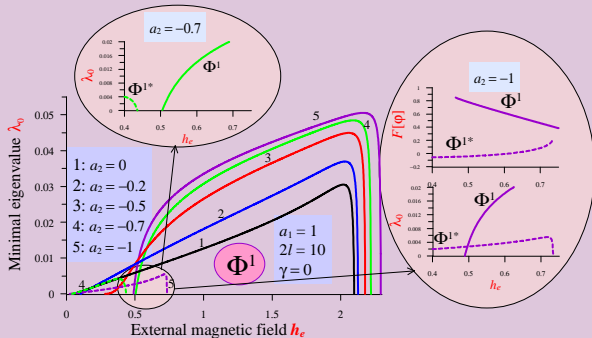
The effect of the second harmonic on the one-fluxon distribution Φ^1 stability



Dependence $\lambda_0(h_e)$ for the one-fluxon solution Φ^1 at $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ with increase of a_2 .

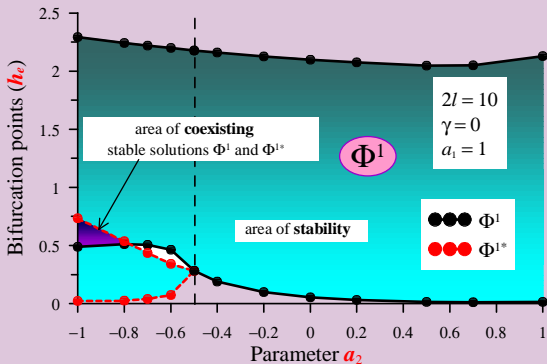
Results and discussion

The effect of the second harmonic on the one-fluxon distribution Φ^1 stability



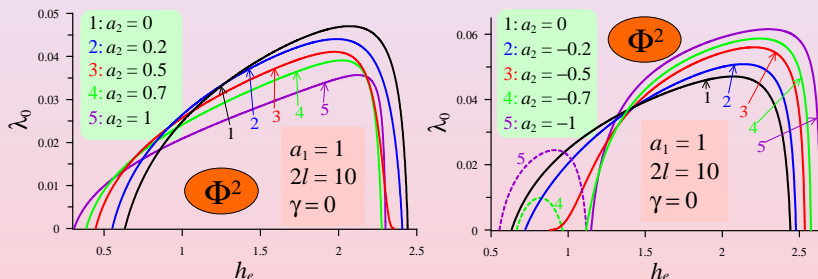
Dependence $\lambda_0(h_e)$ for the one-fluxon solution Φ^1 at $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ with decrease of a_2 .

Results and discussion

Area of the one-fluxon distribution Φ^1 stability

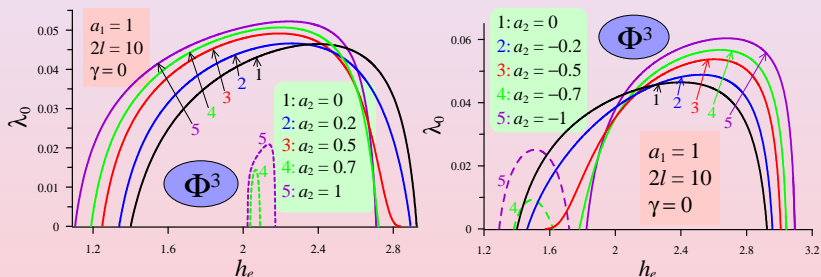
Bifurcation points for the one-fluxon solution Φ^1 dependence of a_2 at $\gamma = 0$, $a_1 = 1$.

Results and discussion

The effect of the second harmonic on the two-fluxon Φ^2 stability

Dependence $\lambda_0(h_e)$ for the two-fluxon solution Φ^2 at $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ when a_2 is changing.

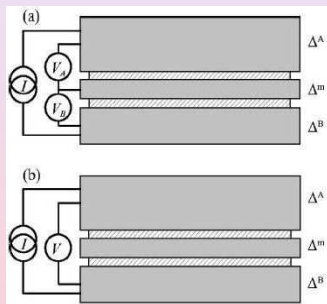
Results and discussion

The effect of the second harmonic on the three-fluxon distribution Φ^3 stability

Dependence $\lambda_0(h_e)$ for the three-fluxon solution Φ^3 at $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ when a_2 is changing.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

Схема двухслойного джозефсоновского контакта



E. Goldobin, A.V. Ustinov, Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions, Phys. Rev. B, 59 (17), 1999, pp. 11532–11538.

Математическая модель

Система уравнений типа синус–Gordon ^a

^aS. Sakai, P. Bodin, N.F. Pedersen, Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices, J. Appl. Phys., v. **73**, No. 5, 1993, pp. 2411 – 2418.

$$\phi_{tt} + \alpha \phi_t - A(s) \phi_{xx} + J_z(\phi) + \Gamma = 0,$$

$$t > 0, \quad x \in (-l, l)$$

- $\phi(t, x) = (\phi_1, \phi_2)^T$ – 2-вектор магнитных потоков в “нижнем” $\phi_1(t, x)$ и “верхнем” $\phi_2(t, x)$ слоях
- $J_z(\phi) = (\sin \phi_1, \sin \phi_2)^T$ – вектор плотностей тока Джозефсона
- $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$ – внешний ток
- $A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}$

Физические параметры задачи

- s – параметр связи между слоями
- l – полудлина контакта
- h_B – внешнее магнитное поле
- γ – внешний ток

Система уравнений типа синус–Gordon для статических решений

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0$$

$$\varphi_x(\pm l) = H$$

$p = (l, s, h_B, \gamma)$ – множество параметров задачи

- $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ – 2-вектор магнитных потоков в “нижнем” $\varphi_1(x)$ и “верхнем” $\varphi_2(x)$ слоях
- $J_z(\varphi) = (\sin \varphi_1, \sin \varphi_2)^T$ – вектор плотностей тока Джозефсона
- $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$ – внешний ток
- $H = h_B(1, 1)^T$ – внешнее магнитное поле
- $A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}$

Устойчивость “в целом” распределений в ДК

Задача Штурма-Лиувилля:

$$-A\psi_{xx} + Q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi_x(\pm l) = 0$$

$$\int_{-l}^l [\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)] dx - 1 = 0$$

$$\lambda_{\min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

- $Q(x) = \text{diag}(\cos \varphi_1(x), \cos \varphi_2(x))$ – потенциал

Глобальная бифуркационная кривая

$$\lambda_0(h_B, \gamma) = 0$$

Парциальная устойчивость распределений в слоях ДДК

Задача Штурма-Лиувилля:

$$-a_{11}u_{1,xx} + q_1(x)u_1 = \mu_1 u_1, \quad u_{1,x}(\pm l) = 0$$

$$\int_{-l}^l u_1^2(x) dx - 1 = 0$$

- $q_1(x) = \cos \varphi_1$ – потенциал

Парциальная бифуркационная кривая

$$\mu_{10}(h_B, \gamma) = 0$$

Методы вычисления

Бифуркации “в целом” распределений в ДК

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0$$

$$\varphi_x(\pm l) = H$$

$$-A\psi_{xx} + Q(x)\psi = \lambda\psi$$

$$\psi_x(\pm l) = 0$$

$$\int_{-l}^l [\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)] dx - 1 = 0$$

параметры - γ, h_B, λ

Методы вычисления

Парциальные бифуркации распределений в слоях ДК

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0$$

$$\varphi_x(\pm l) = H$$

$$-a_{11}u_{1,xx} + q_1(x)u_1 = \mu_1 u_1$$

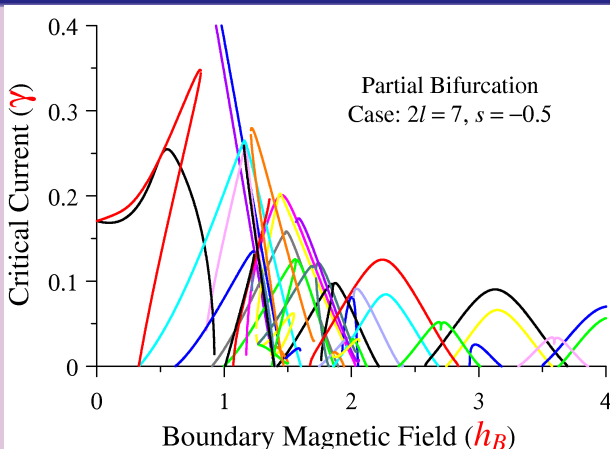
$$u_{1,x}(\pm l) = 0$$

$$\int_{-l}^l u_1^2(x) dx - 1 = 0$$

параметры - γ , h_B , μ_1

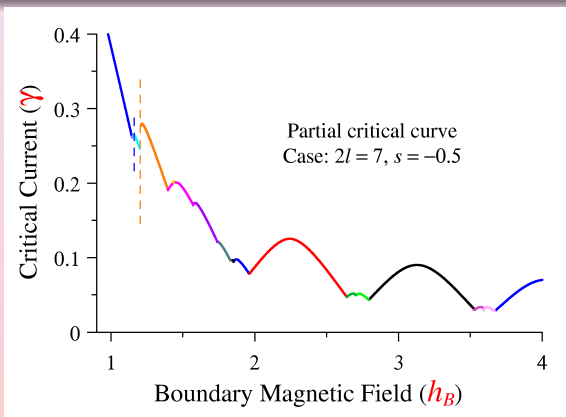
Численные результаты

Некоторые парциальные бифуркационные кривые в случае $2l = 7$ и $s = -0.5$



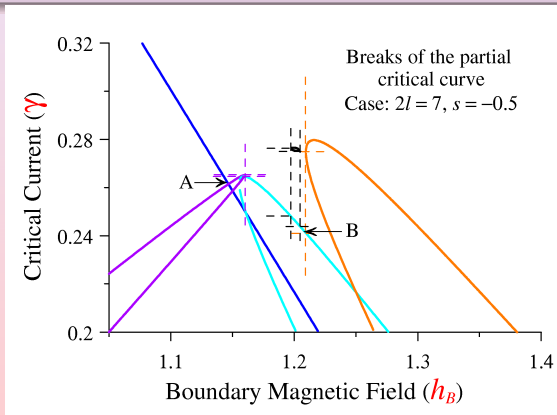
Численные результаты

Критическая кривая (огнивающая бифуркационных кривых) при $2l = 7$ и $s = -0.5$.



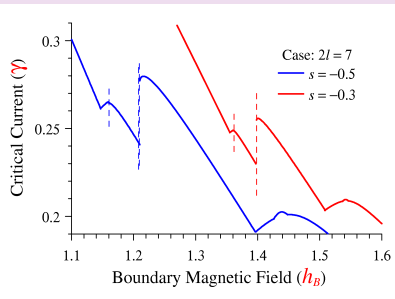
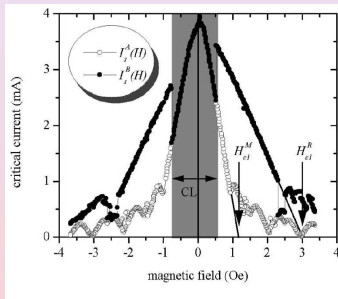
Численные результаты

Нарушения непрерывности частичной критической кривой для $2l = 7$ и $s = -0.5$.



Численные результаты

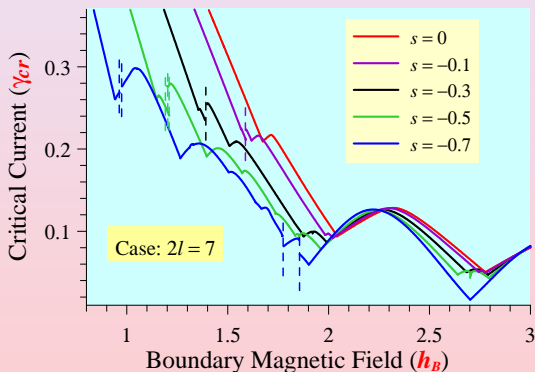
Сравнение с экспериментом



Экспериментальная критическая кривая (E. Goldobin, A.V. Ustinov, Phys. Rev. B, 59 (17), 1999, pp. 11532–11538) \leftrightarrow Критическая кривая **в численном эксперименте**.

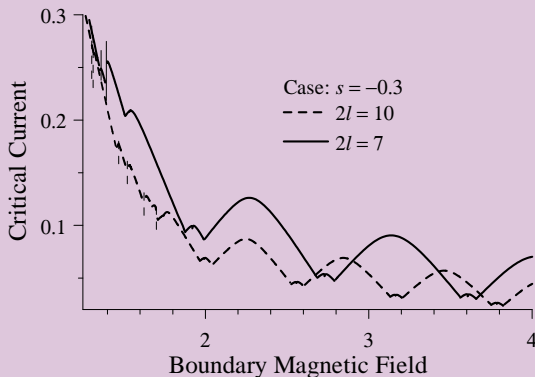
Численные результаты

Влияние параметра связи на критическую кривую.



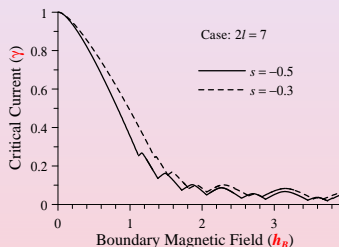
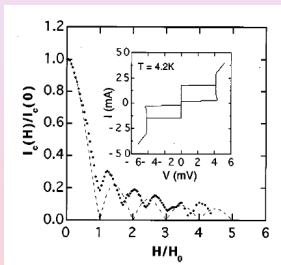
Численные результаты

Влияние длины контакта на критическую кривую.



Численные результаты

Сравнение с экспериментом



Экспериментальная критическая кривая (S.N. Song, P.R. Auvil, M. Ulmer, and J.B. Ketterson, Phys.

Rev. B, v. 53, No 10 (1996), p. R6018.) \leftrightarrow Критическая кривая в **численном эксперименте**

(Глобальные критические кривые при $2l = 7$, $s = -0.5$ и $s = -0.3$).

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!