Эффект Казимира: от квантовой теории поля к микро (нано) –механическим машинам

И. Г. Пироженко (ЛТФ ОИЯИ)

Энергия вакуума

- Энергия гармонического осциллятора

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Планк, 1911

- Квантованное поле как бесконечный набор гармонических осцилляторов

Плотность вакуумной энергии поля

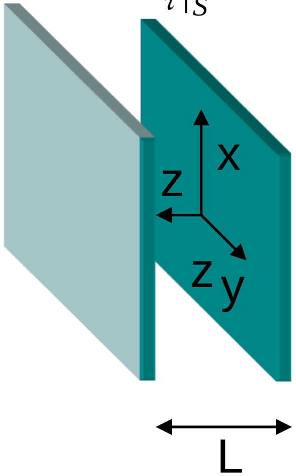
$$u = \frac{1}{V}\sum_{\{n\}} \frac{1}{2}\,\hbar\omega_{\{n\}} = 2\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\hbar c\,|k|$$

бесконечная величина!

- Вакуумная энергия идеально проводящих пластин

$$E_\tau\big|_S = H_n\big|_S = 0$$

H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Acad. Wet. B51, 793 (1948)



$$\omega_{\{n\}} = c\sqrt{\mathbf{k}^2}, \qquad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad \mathbf{k}_{cavity} = \left(k_x, k_y, \frac{\pi\, n}{L}\right)$$

Часть вакуумной энергии, зависящая от расстояния между пластинами=энергия Казимира

$$\boxed{U(L) = E(L) - E(\infty)}$$

$$k_x = \sqrt{u}\ \cos\varphi, \qquad k_y = \sqrt{u}\ \sin\varphi$$

$$E(d) = \hbar c \frac{a^2}{\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k_x \int_0^\infty \mathrm{d}k_y \left[\sum_{n=0}^{\infty}{}' \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + n^2\pi^2/L^2} \right] =$$

$$= \frac{\hbar c \pi^2}{8L^3} a^2 \boxed{\left[\int_0^\infty du\sqrt{u} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty du\sqrt{u+n^2} \right]}$$

$$E(\infty) = \hbar c \frac{\pi^2}{2L^3} \frac{a^2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k_x \int_0^\infty \mathrm{d}k_y \int_o^\infty \mathrm{d}k_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\hbar c \pi^2}{8L^3} a^2 \boxed{2\int_0^\infty dn \int_0^\infty du\sqrt{n^2+u}}$$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty du\sqrt{n^2+u} = \frac{1}{2} I(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I(n) - \int_0^\infty dn\ I(n) = -\frac{B_2}{2!} I'(0) - \frac{B_4}{4!} I'''(0) + \ldots$$

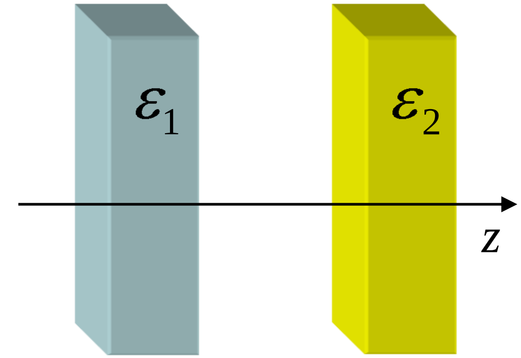
$$\boxed{U(L) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720\ L^3} a^2}$$

$$\boxed{\frac{F}{a^2} = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4}} \approx \frac{1.3 \cdot 10^{-27}}{L^4}$$

$$F \approx 10^{-3} N, \qquad L = 100\ nm$$

$$F \approx 10^{5} N, \qquad L = 1\ nm$$

Теория Лифшица



Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 29, 94 (1956)

Учитывает
- Конечную температуру
- Конечную проводимость

$$\boxed{F(L) = -\frac{k_B T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \zeta_n^3 \int_1^{\infty} p^2 \left[f^{TE}(\zeta_n, p) + f^{TM}(\zeta_n, p) \right] dp}$$

$$\zeta_n = 2\pi\, n\, k_B T / \hbar$$

$$f^{\rho}(\zeta_n, p) = \frac{r_1^{\rho} r_2^{\rho} e^{-2p\zeta_n L/c}}{1 - r_1^{\rho} r_2^{\rho} e^{-2p\zeta_n L/c}}, \qquad \rho = TE, TM$$

Коэффициенты отражения пластин при мнимых частотах (!)

$$r_i^{TE}(i\zeta_n) = -\frac{\sqrt{\varepsilon_i(i\zeta_n) - 1 + p^2} - p}{\sqrt{\varepsilon_i(i\zeta_n) - 1 + p^2} + p}, \qquad r_i^{TM}(i\zeta_n) = \frac{\sqrt{\varepsilon_i(i\zeta_n) - 1 + p^2} - \varepsilon_i(i\zeta_n) p}{\sqrt{\varepsilon_i(i\zeta_n) - 1 + p^2} + \varepsilon_i(i\zeta_n) p}$$

Температурные поправки

1. «Малые» расстояния $L << c\hbar / k_B T$

Главную роль в сумме играют члены с большими «n»

Воспользуемся формулой Эйлера-Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' f(x) = \int_0^{\infty} f(n)\, dn + \frac{1}{12} f'(0) - \frac{1}{30 \cdot 4!} f'''(0) + \ldots \qquad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 2$$

$$\boxed{F = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} \left[1 - \frac{16}{3} \left(\frac{L k_B T}{\hbar c} \right)^4 \right]}$$

При T=300K, поправка малы если $L < 5 \cdot 10^{-6} m$

Вывод: при T<300K температурной зависимостью можно пренебречь на расстояниях доступных в современных экспериментах

Температурные поправки

2. «Большие» расстояния $L >> c\hbar / k_B T$

Главную роль в сумме играют член с n=0

$$F = -\frac{k_B T}{16\pi\ L^3}\int_0^\infty x^2 \left[\frac{r_1 r_2 e^{-x}}{1 - r_1 r_2 e^{-x}}\right] dx, \qquad x = 2pL\xi_0 / c$$

Диэлектрики

$$n = 0: \quad r_i^{TE} = 0, \quad r_i^{TM} = \frac{1-\varepsilon_i(0)}{1+\varepsilon_i(0)}.$$

$$\boxed{F \approx -\frac{k_B T}{8\pi\ L^3}\frac{\varepsilon_1(0)-1}{\varepsilon_1(0)+1}\frac{\varepsilon_2(0)-1}{\varepsilon_2(0)+1}}$$

Металлы

Правило Швингера: сначала $\varepsilon_i(0) = \infty$ потом n=0.

Schwinger J., DeRaad L.L., Milton K.A.
1978, Ann. Phys., NY 115, 1

$$\boxed{F = -\frac{k_B T}{4\pi L^3}\zeta(3), \qquad \zeta(3) \approx 1.202}$$

Конечная проводимость, T=0

- Введем поправочный коэффициент, учитывающий конечную проводимость

$$\eta_F = F/F_C\,, \qquad F_C = \frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{L^4}$$

$$\eta_F = \frac{120}{\pi^4}\int_0^\infty dK\, K^2 \int_0^K d\Omega \sum_p \frac{r_1^p r_2^p}{e^{2K} - r_1^p r_2^p}, \qquad K = \kappa L, \qquad \Omega = \omega \frac{L}{c}.$$

$$r_i^{TE} = -\frac{\sqrt{\omega^2(\varepsilon_i(\mathrm{i}\omega) - 1) + c^2\kappa^2} - c\kappa}{\sqrt{\omega^2(\varepsilon_i(\mathrm{i}\omega) - 1) + c^2\kappa^2} + c\kappa}, \qquad r_i^{TM} = \frac{\sqrt{\omega^2(\varepsilon_i(\mathrm{i}\omega) - 1) + c^2\kappa^2} - c\kappa\, \varepsilon_i(\mathrm{i}\omega)}{\sqrt{\omega^2(\varepsilon_i(\mathrm{i}\omega) - 1) + c^2\kappa^2} + c\kappa\varepsilon_i(\mathrm{i}\omega)}$$

- Свойства материала описываются через диэлектрическую проницаемость при мнимых частотах $\varepsilon(i\omega)$

При $\varepsilon_i = \infty \;\Rightarrow\; r_i = -1$

получается сила между двумя идеально проводящими пластинами

Диэлектрическая проницаемость при мнимых частотах

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \qquad \omega = \omega' + i\omega''$$

Аналитические свойства

$$\lim_{\omega\to 0} \varepsilon''(\omega) = \infty \qquad \textit{для металлов}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \varepsilon''(\omega) = 0 \qquad \textit{для диэлектриков}$$

$$\lim_{\omega\to \infty} \varepsilon(\omega) = 1$$

Ландау, Лифшиц, т. VII
«Электродинамика сплошных сред»

$$\varepsilon''(\omega) > 0 \quad \textit{при} \quad \omega = \omega' > 0,$$

$$\varepsilon''(\omega) < 0 \quad \textit{при} \quad \omega = \omega'' < 0.$$

Соотношение причинности Крамерса-Кронига

$$\varepsilon'(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{x\,\varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(i\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\,\varepsilon''(x)}{x^2 + \omega^2}\,dx$$

Плазменная модель

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \longrightarrow \varepsilon(i\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m^*}$$

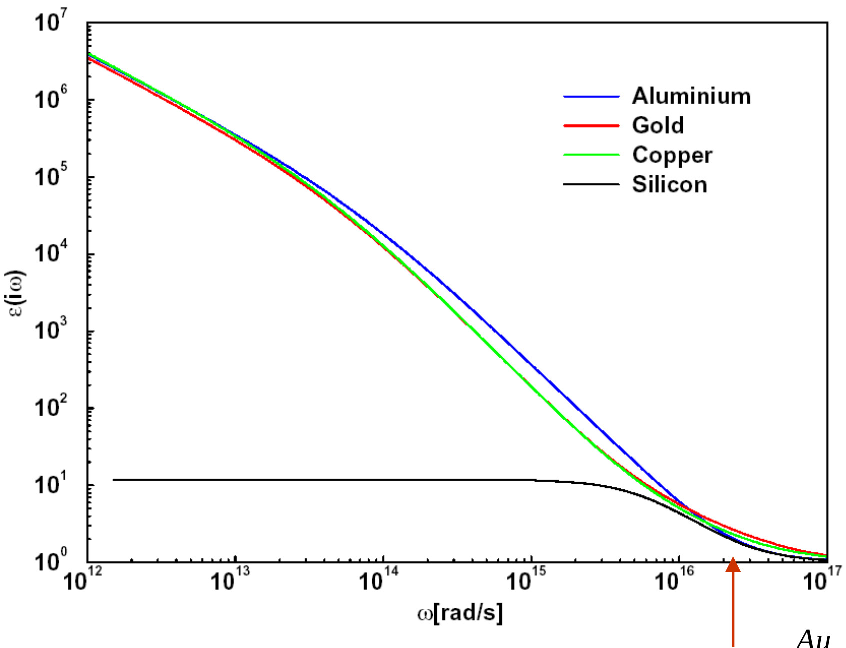
- Малые расстояния $L \ll \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$

$$F = -\frac{\hbar}{16 \cdot \pi^{3/2} L^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} G, \qquad G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n - 1/2)}{(2n-1)!\ n^3} \approx 0.984$$

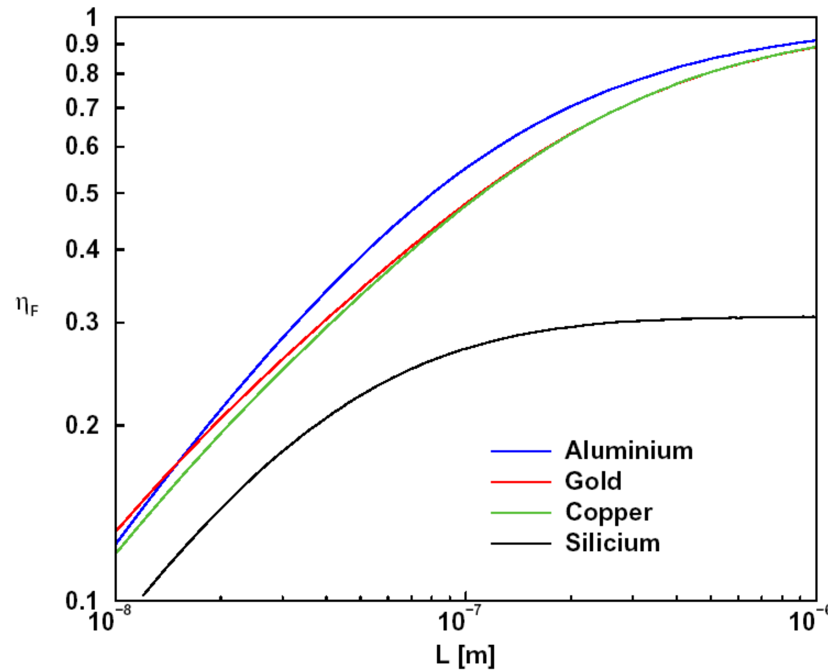
- Большие расстояния $L \gg \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} \left(1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_p}{L} \right)$$

Сила Казимира для разных материалов



ω_p^{Au}



0.303

Пример: золото, модель Друде

$$\omega_p = 1.367 \cdot 10^{16}\ рад/с$$

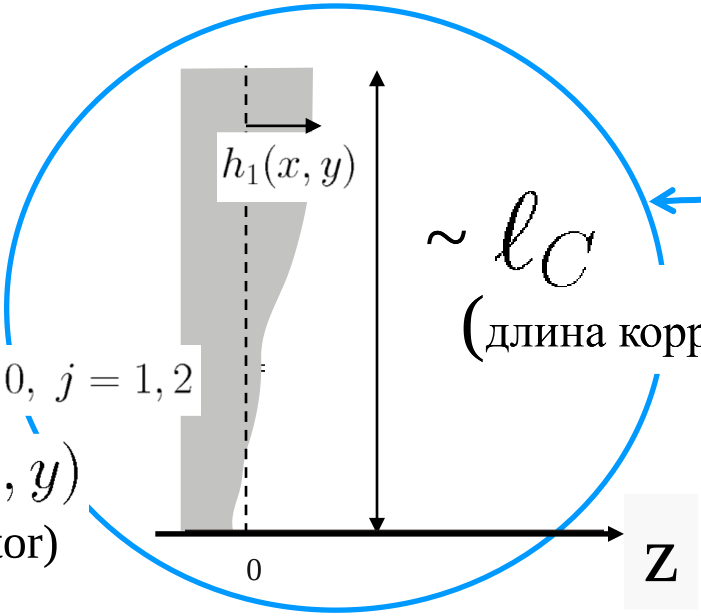
$$\omega_\tau = 5.316 \cdot 10^{13}\ рад/с$$

$$\varepsilon_{Au}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_\tau)} \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m^*}$$

Учет шершавости поверхностей

$L^2 \ll A, \;\; \ell_C^2 \ll A$

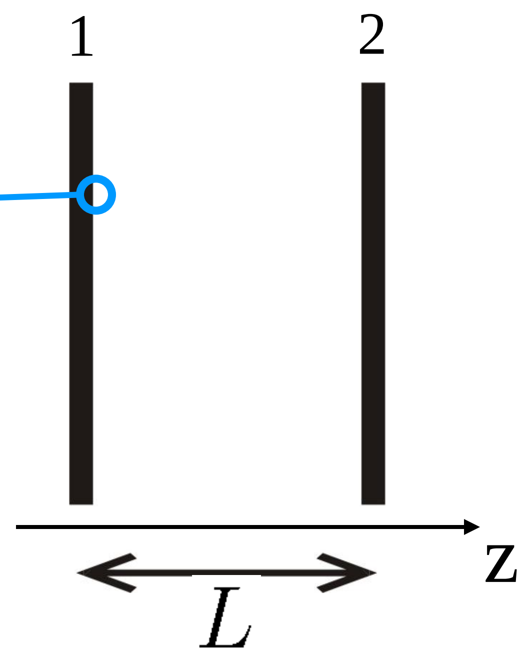
P. Maia Neto, A. Lambrecht & S. Reynaud, PRA 72 (2005)



$\langle h_j(\mathbf{r})\rangle = 0, \;\; j = 1, 2$

$\mathbf{r} = (x, y)$

(2D vector)



Шершавости (1) и (2) независимы

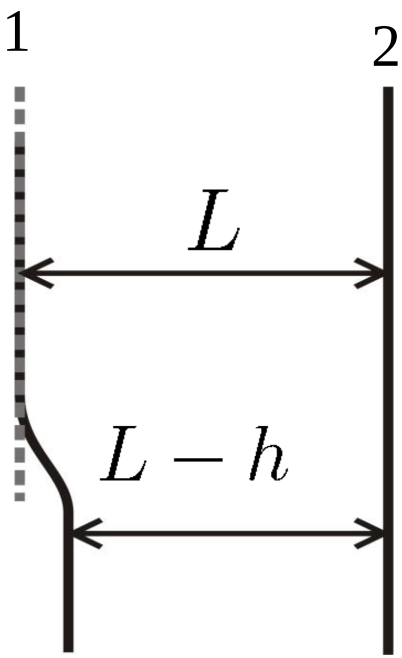
$$\langle h_1(\mathbf{r}) h_2(\mathbf{r}')\rangle = 0$$

$$\langle h_j(\mathbf{r}) h_j(\mathbf{r}')\rangle = \langle h_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}') h_j(\mathbf{0})\rangle$$

Трансляционная инвариантность вдоль поверхности зеркала

$L \ll \ell_C$

На рассматриваемом расстоянии поверхность выглядит практически плоской



$$E_{\mathrm{PP}}^{\mathrm{corr}} = \frac{1}{A}\int \mathrm{d}^2\mathbf{r}\, E_{\mathrm{PP}}(L - h(\mathbf{r}))$$

Среднее по профилю поверхности значение энергии

Расчет по теории возмущений

$$E_{\mathrm{PP}}^{\mathrm{corr}} = E_{\mathrm{PP}} + \delta E_{\mathrm{PP}}$$

$$\delta E_{\mathrm{PP}} = \frac{E''_{PP}(L)}{2}\left\langle h_1^2 + h_2^2 \right\rangle$$

«Касательная сила Казимира»

$$\mathbf{F}_{Lat} = -\nabla_{Lat} E_C \qquad h(x, y) = A \sin \frac{2\pi z}{L}$$

Корреляция поправок

- Поправки, связанные с дисперсией диэлектрической проницаемости, существенны на расстояниях

$$L < \lambda_p, \qquad \lambda_p^{Au} = 1.07 \cdot 10^{-7}\, m$$

- Поправки, связаные с шершавостью поверхности проявляются на расстояниях $L < h.$ Зависят от подготовки поверхностей.

- Поправки, связанные с ненулевой температурой, проявляются на расстояниях

$$L > \frac{c\hbar}{k_B T} = \frac{2.29 \cdot 10^{-3}}{T}$$

Если $T = 300, \quad L > 10^{-5}\, m.$

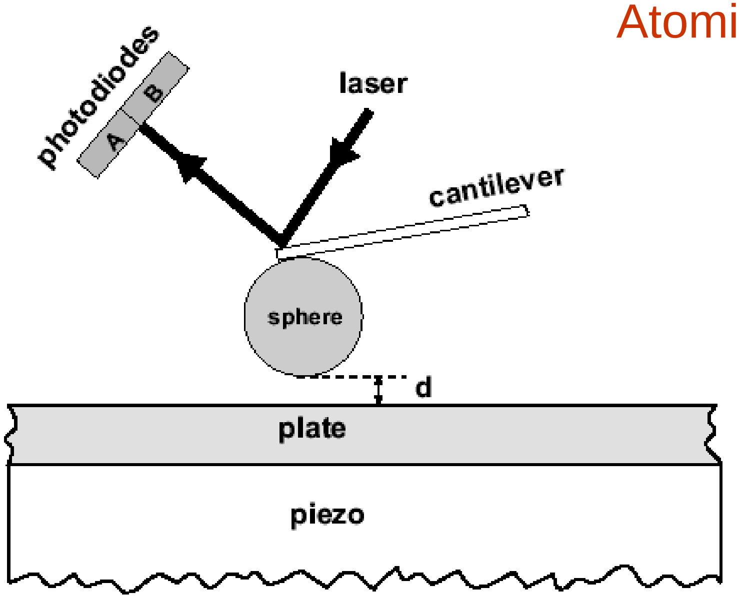
Вывод: с хорошей точностью поправки к эффекту Казимира можно учитывать независимо друг от друга

Эксперименты

• M. J. Sparnaay, 1958, параллельные пластины , 100% погрешность
• P. van Blokland and J. Overbeck, 1971-78

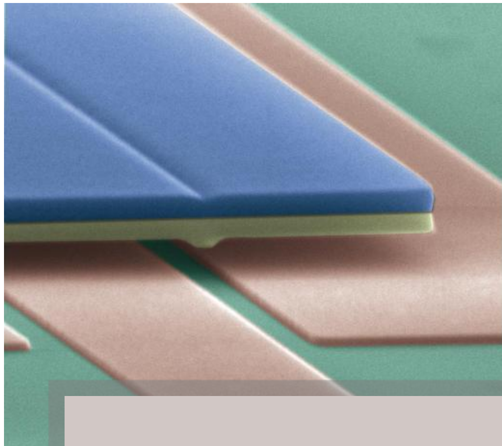
• И.Б. Дерягин , 1934-56, впервые предложил использовать сферические тела, чтобы преодолеть проблему параллелизма

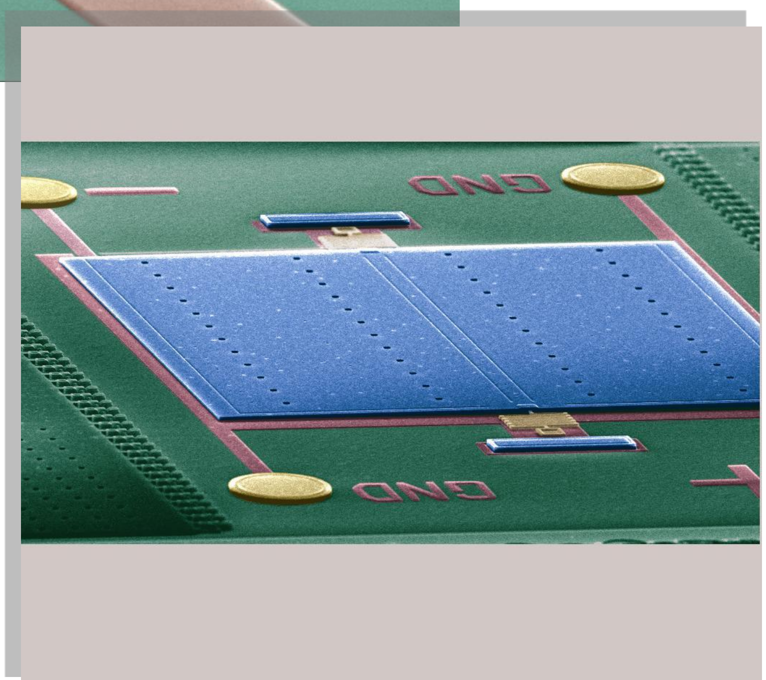
Atomic force microscope

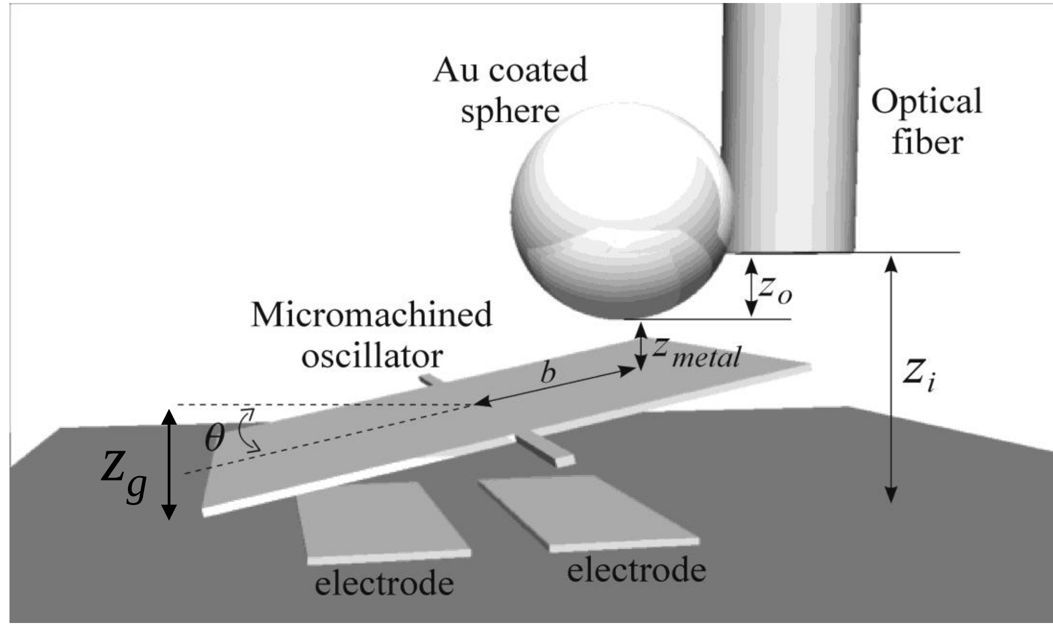


Измерения:
•статические
•динамические

Микроэлектронный крутильный маятник







The pictures are taken from the slide presentation by R.S.Decca on QFEXT’05, Barcelona, September 2005

The thickness of the polysilicon plate is 3.5 µm
500 x 500 µm²

Современные эксперименты

Эксперимент	Установка и геометрия	Расстояние	Погрешность
S.K.Lamoreaux, Phys.Rev.Lett.78,5(1997); 81,5475(E) (1998)	Torsion pendulum, sphere-plate	0.6-6 μm	2-3%(95% conf. level)
U.Mohideen, A.Roy, Phys.Rev.Lett. 81,4549 (1998)	Atomic force microscope, sphere-plate	0.1 μm 0.9 μm	1% (68% conf. level) 100%
R.S.Decca et al., Phys.Rev.D68:116003, 2003	Microelectronical machine sphere-plate plate-plate	0.5-3.0 μm 0.5-3.0 μm	2-3%(95% conf. level) 15%
G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G.Ruoso, Phys.Rev.Lett. 88, 041804-1 (2001)	Silicon cantilever plate-plate	0.5-3.0 μm	15%
G.Bimonte,E.Calloni, G.Esposito,L.Rosa, Nucl.Phys.B726:441-463,2005	Superconducting transition, the Casimir energy affects the value of critical magnetic field		

Приближение «близкой силы» (Дерягин Б.В, 1934)

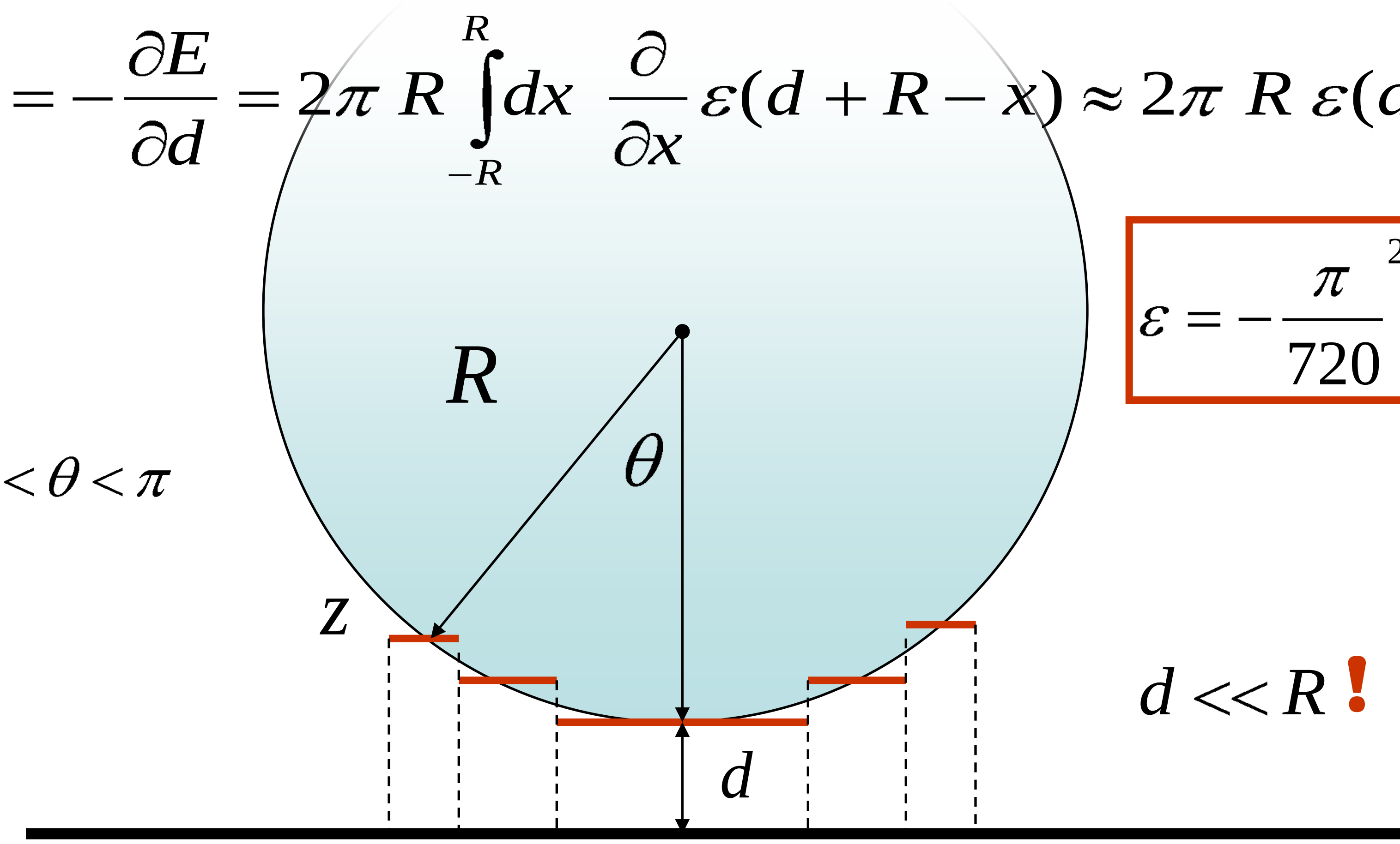
Proximity force approximation (PFA)

$$E(d) = \int dS_z \ \varepsilon(z), \quad z = d + R(1-\cos\theta), \quad dS_z = 2\pi\, R^2 \sin\theta\, d\theta.$$

$$F = -\frac{\partial E}{\partial d} = 2\pi\, R \int_{-R}^{R} dx \ \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(d+R-x) \approx 2\pi\, R\, \varepsilon(d)$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{d^3}}$$

$0 < \theta < \pi$



$d << R$!

Что заставляет нас изучать эффект Казимира?

Ограничения на гипотетические силы, предсказываемые в суперсимметричных теориях, супергравитации, теории струн

Гравитационные эксперименты $\quad 10^{-2}\,m < \lambda < 10^{6}\,km$

Юкавские поправки к ньютонову потенциалу

$$P_Y = P_C^{th} - P_C^{\exp}$$

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1+\alpha\, e^{-r/\lambda}\right)$$

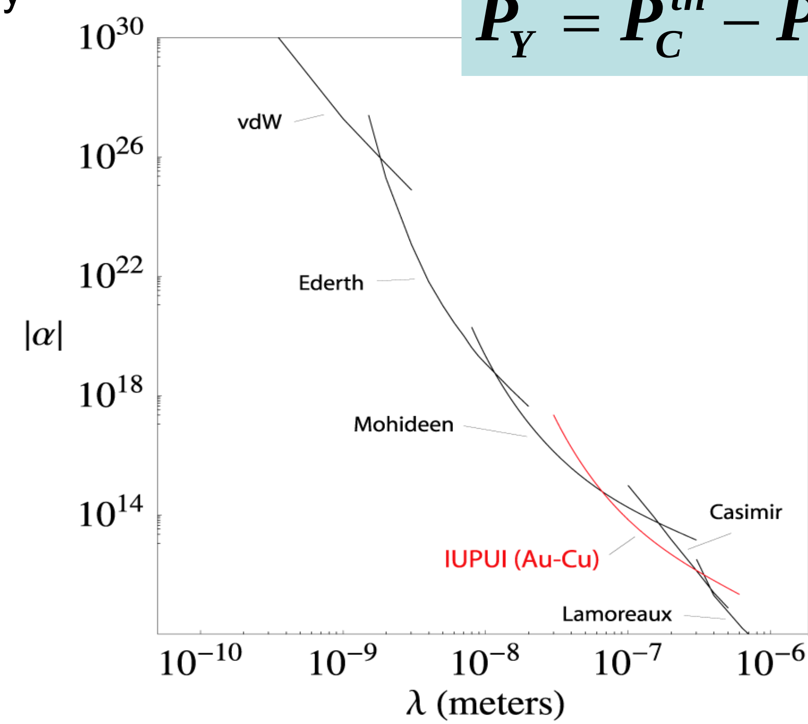
$$r >> R_n \sim \frac{1}{M_{Pl}^{(4+n)}}\left(\frac{M_{Pl}}{M_{Pl}^{(4+n)}}\right)^{2/n} \sim 10^{\frac{32}{n}-17}\,cm,$$

$$M_{Pl}^{(4+n)} = 1/G_{4+n}^{1/(2+n)}$$

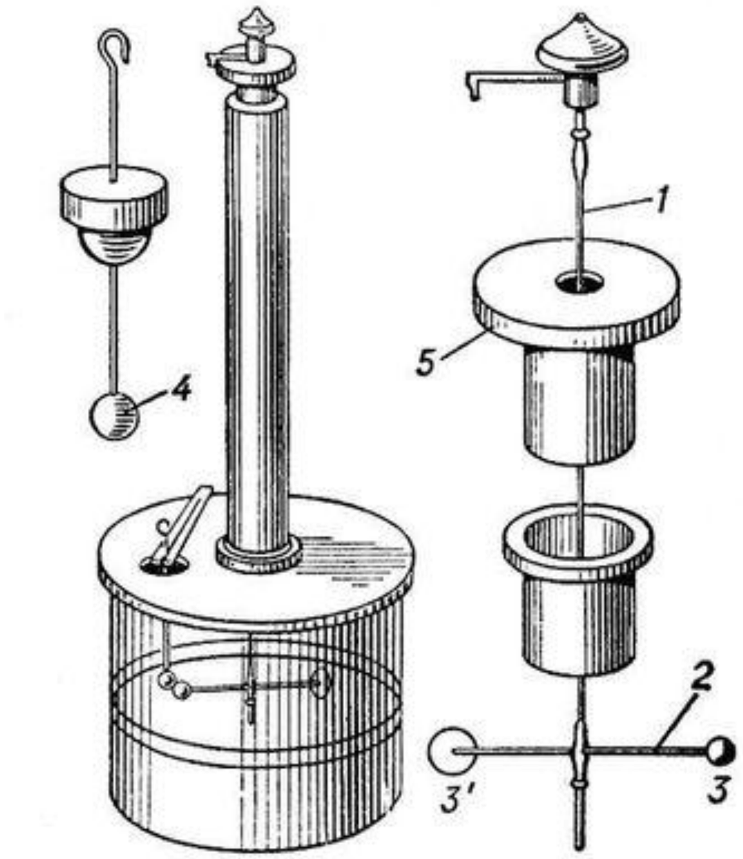
$$n=1, \quad R_1 \sim 10^{15}\,cm$$

$$n=2, \quad R_2 \sim 1mm$$

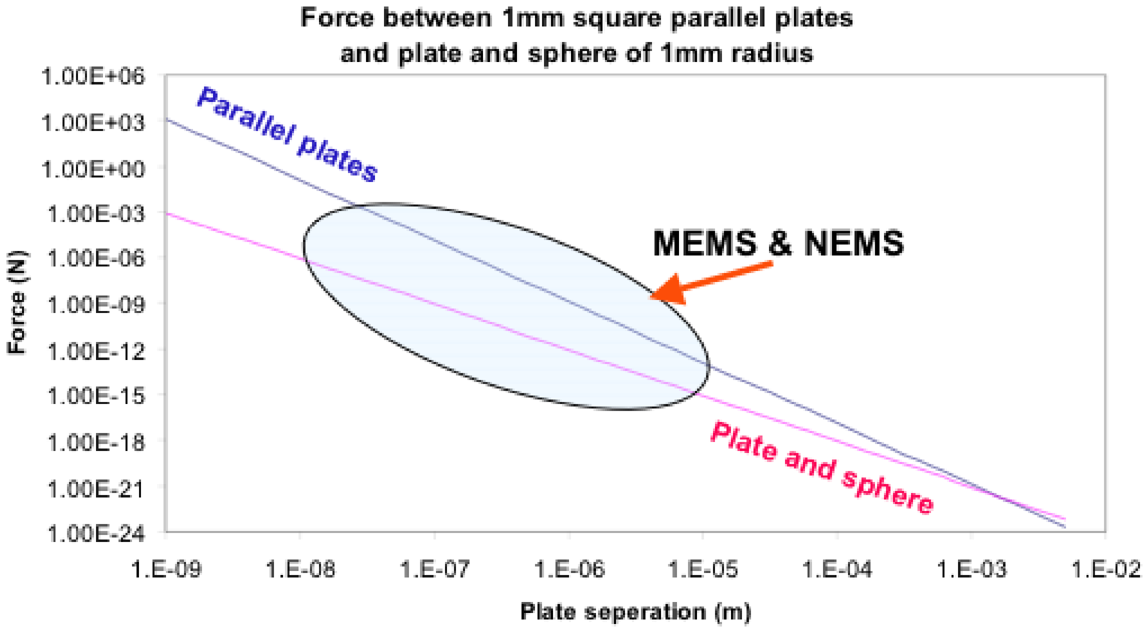
$$n=3, \quad R_3 \sim 5nm$$

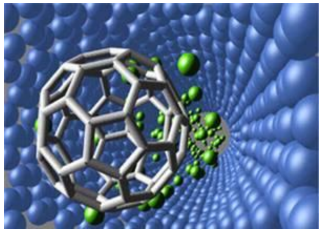


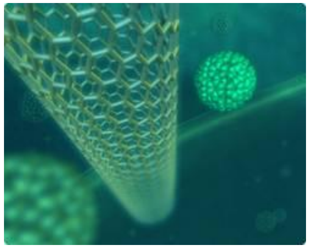
Крутильные весы –прибор для измерения гравитационного притяжения и силы Казимира



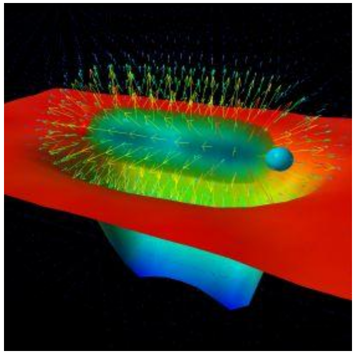
- Важная роль сил Казимира в наноразмерных системах







Web page of Rutherford Appleton Lab., B. J. Kent

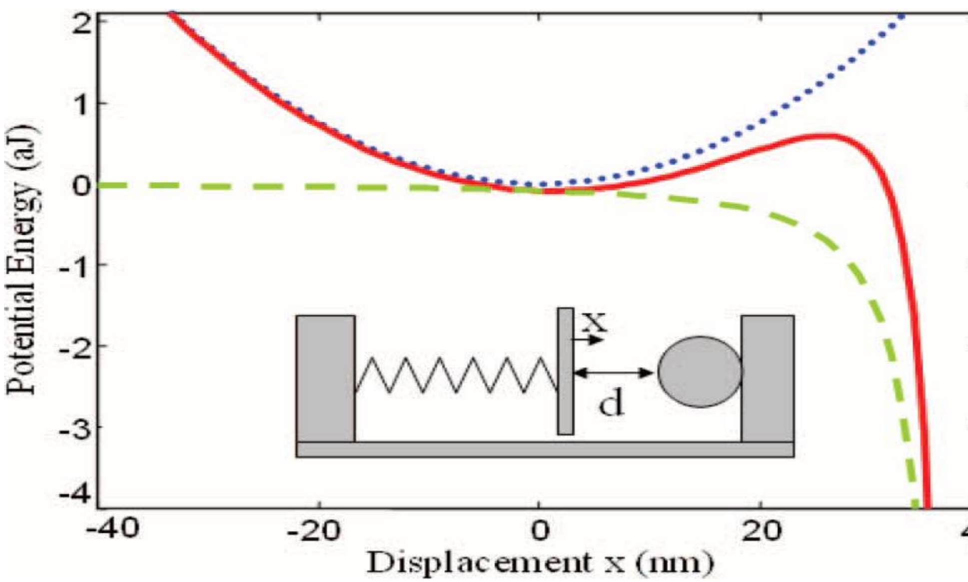


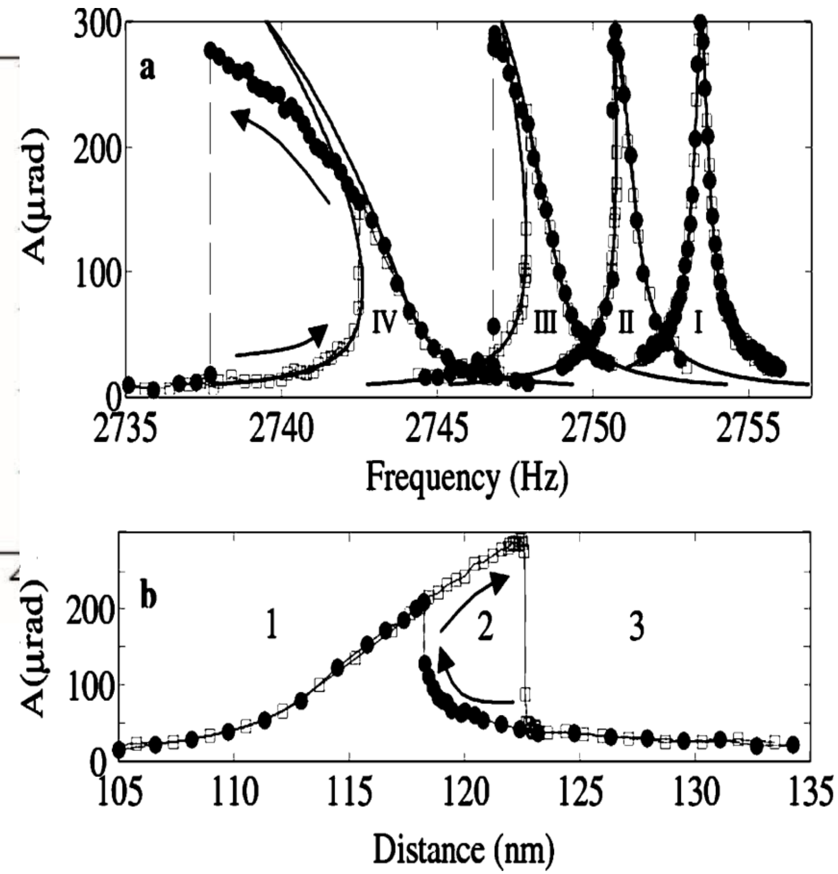
- КХД на решетке

A.R Kitson and A.I. Signal, J. Phys. A: Math and Gen. 39 (2006), 6473-6479

Наномашины: нелинейный казимировский осциллятор

из D. Iannuzzi et al, *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electronics* **13** 400 (2007)





$$U = \frac{kx^2}{2}$$

$$\varepsilon = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 x^3}$$

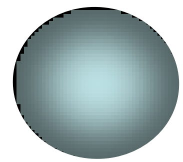
КЭД эффект вызывает бистабильность и гистерезис

Учет геометрии границы

- Компактные объекты с известным спектром

С.Г. Мамаев, Н.Н. Трунов, 1979

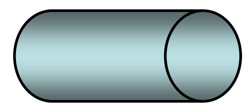
$$E_{EM} = 0.0916 \frac{\hbar c}{a},$$



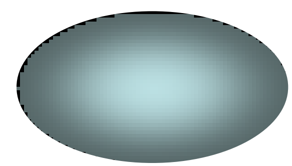
T. Boyer, 1968

$$E_{EM} = 0.004687 \frac{\hbar c}{R}, \qquad E_D = 0.0044 \frac{\hbar c}{R},$$

P. Gosdzinsky, A. Romeo, 1998



$$E_{EM} = -0.01356 \frac{\hbar c}{R^2}, \qquad E_D = 0.00615 \frac{\hbar c}{R^2}$$



$$E_D = \frac{1}{2b}\left(0.00563 + 0.00188 e^2 + O\left(e^4\right)\right), \qquad e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$$

A. R. Kitson, 2006

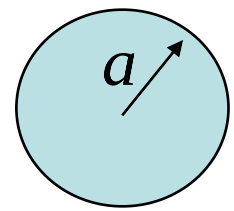
Пример: вычисление энергии Казимира для идеально проводящей сферы

Уравнения на собственные частоты:

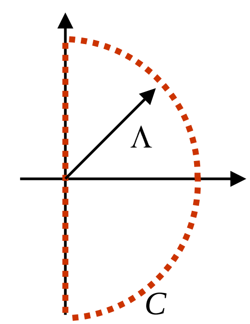
$$E(s)=\frac{\hbar}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\omega_{nl}-\omega_{nl}(a\to\infty)\right]^{-s}\to\hbar\sum_{l=1}^{\infty}(l+1/2)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\omega_{nl}-\omega_{nl}(a\to\infty)\right]^{-s}$$

$$TE \quad j_l(\omega a)=0,\quad h_l^{(1)}(\omega a)=0$$

$$TM \quad \frac{d}{dr}\left[r\, j_l(\omega r)\right]\Big|_{r=a}=0,\quad \frac{d}{dr}\left[r\, h_l^{(1)}(\omega r)\right]\Big|_{r=a}=0,$$



По теореме Коши
$$\sum_{n=1}^{N}\omega_{nl}^{(\alpha)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\Lambda}dz\; z^{-s}\,\frac{d}{dz}\ln\left[f^{(\alpha)}(z,a)\right]$$



$$E_{reg}=\frac{\hbar c}{\pi a}\sum_{l=1}^{\infty}(l+1/2)^{-s}\int_0^{\infty}dy\;\ln\left[1-\left(\sigma_l'(y)\right)^2\right],\qquad \sigma_l(y)=y\,I_{l+1/2}(y)K_{l+1/2}(y)$$

Равномерное асимптотическое разложение функций Бесселя

$$I_\nu(\nu z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{\nu^k} \right\}$$

$$K_\nu(\nu z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(t)}{\nu^k} \right\}$$

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = \frac{3\,t - 5\,t^3}{24}, \quad u_2(t) = \frac{81\,t^2 - 462\,t^4 + 385\,t^6}{1152}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad \eta = \sqrt{1+z^2} + \ln \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$I_\nu(\nu z) K_\nu(\nu z)\Big|_{l\to\infty} \approx \frac{1}{2\nu} \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}$$

$$Q_l = \frac{1}{\pi}(l+1/2)^{-s} \int_0^\infty dy \, \ln\left[1 - (\sigma_l'(y))^2\right] \approx \frac{\nu^{-s+1}}{\pi} \int_0^\infty dz \, \ln\left[1 - \frac{1}{4\nu^2(1+z^2)^3}\right],$$

$$\approx -\frac{\nu^{-s-1}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{3}{64}\nu^{-s-1}, \qquad l \to \infty$$

Вычитание

$$E_{reg}=\frac{\hbar c}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\left[Q_l+\frac{3}{64}\nu^{-s-1}-\frac{3}{64}\nu^{-s-1}\right]=\frac{\hbar c}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{Q_l}-\frac{3}{64}\sum_{l=1}^{\infty}\nu^{-s-1}$$

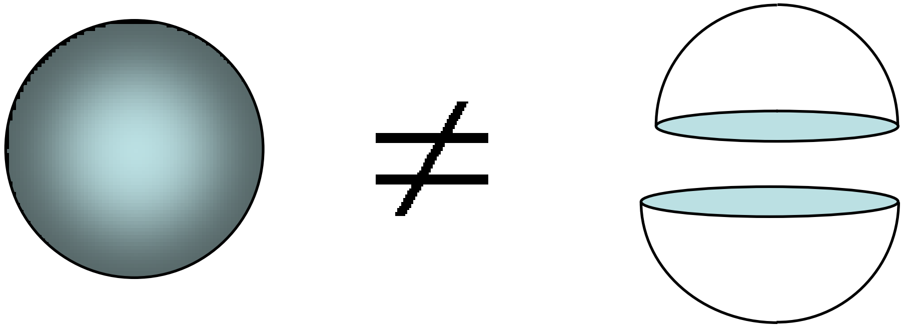
$$-\frac{3}{64a}\sum_{l=1}^{\infty}(l+1/2)^{-s-1}\equiv-\frac{3}{64a}\left[\zeta(s+1,1/2)-1\right]$$

Для снятия регуляризации надо положить s=-1, тогда $\varsigma(0,1/2)=0$

$$E=\frac{\hbar c}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{Q_l}+\frac{3}{64}\frac{\hbar c}{a}\approx\left[-0.00054...+\frac{3}{64}\right]\frac{\hbar c}{a}$$

<u>Вывод</u>: вакуумная энергия идеально проводящей сферы положительна, что соответствует раздуванию сферы

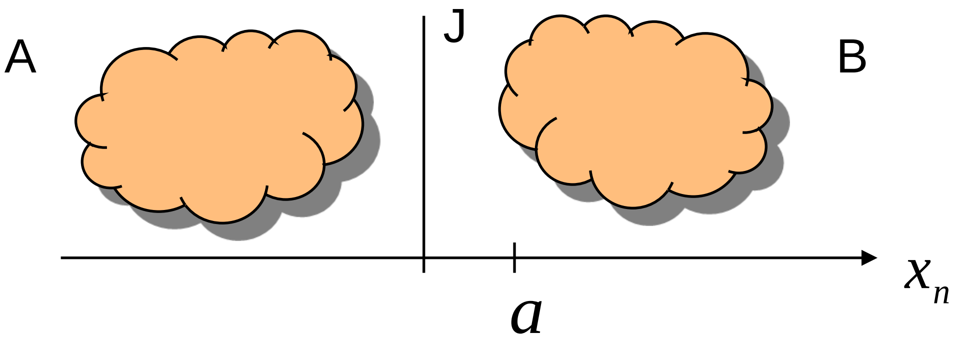
От одиночных компактных объектов к взаимодействию тел



Противоположности притягиваются

Теорема Клиха (I.Klich, PRL, 2006):

Сила между двумя телами, являющимися зеркальными отражениями друг друга, есть сила притяжения



$$J:\ A \to B$$

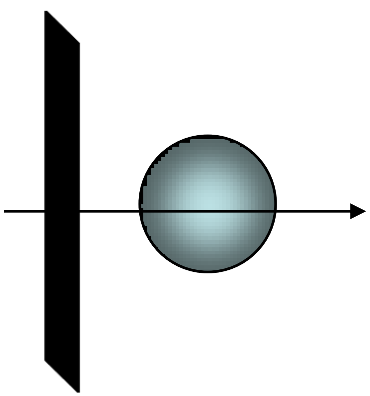
$$J(\mathbf{x}, x_n) = (\mathbf{x}, a - x_n)$$

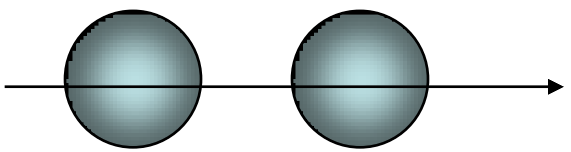
Вычисление энергии Казимира как задача рассеяния

$$E_C = \frac{1}{2}\int_0^\infty dE\, E\, \delta\rho_C(E)$$

•Формула Крейна для фазового сдвига

$$\delta\rho(E) = \rho(E) - \rho_0(E) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dE}\ln\ \det\ S_n(E,\{a_{ij}\},\{r_{ij}\})$$

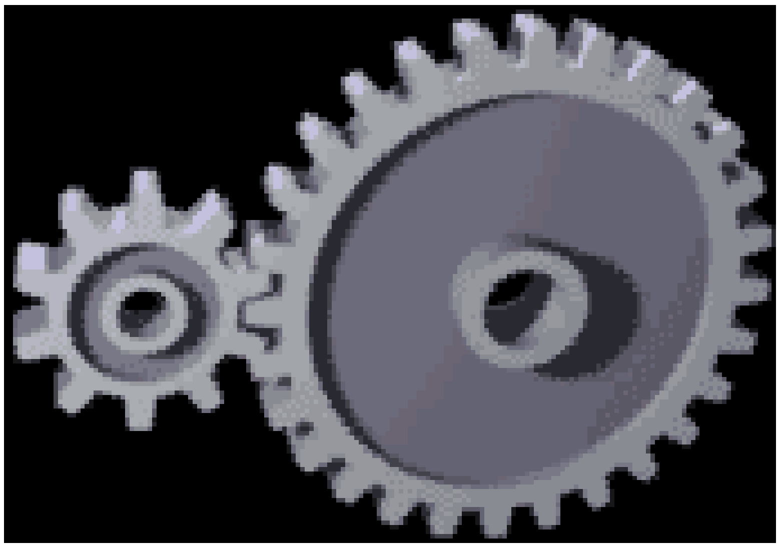




Предел малых расстояний = PFA+поправки

Зубчатая передача

Реечная передача



http://en.wikipedia.org/wiki/Spur_gear