Академия наук Украинской ССР
Институт теоретической физики

Препринт
ИТФ-87-65Р

А.Б.Замолодчиков

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Киев - 1987

УДК 539.I2

А.Б.Замолодчиков

Точные решения двумерной конформной теории поля и критические явления

Дан краткий обзор современного развития конформной теории поля в двумерном пространстве и ее применений к теории критических явлений. Обсуждаются свойства ренормализационной группы в двумерной теории, общие свойства конформной теории поля, свойства вырожденных представлений алгебры Вирасоро и других бесконечномерных алгебр, "минимальные модели" конформной и суперконформной теории поля, "парафермионные" и другие симметрии. Рассмотрена теория возмущений вблизи конформно-инвариантных решений.

A.B.Zamolodchikov

Exact Solutions of Conformal Field Theory in two Dimensions and Critical Phenomena

Modern developement of conformal field theory in two dimensions and its applications to critical phenomena are briefly reviewed. The specific properties of a renormalization group in two dimensions and the fundamentals of 2D conformal field theory are presented and the properties of degenerate representations of Virasoro algebra and other infinite-dimensional algebras, "minimal" models of conformal and superconformal field theory, "parafermionic" and other symmetries are discussed. Also, we investigate a perturbation theory around conformal solutions of field theory.

§I. ВВЕДЕНИЕ

При приближении к точке фазового перехода второго рода характерный размер флуктуаций параметра порядка - корреляционный радиус R_c - неограниченно растет. Эти крупномасштабные флуктуации, которые и приводят к появлению сингулярностей термодинамических функций, можно описывать на языке эффективной теории поля; при этом тонкие детали микроскопического строения системы оказываются несущественными, а взаимодействие флуктуаций определяется только природой самого параметра порядка и величиной R_c. Эти идеи, развитые Кадановым, Вайдомом, Паташинским, Покровским и другими составляют основу гипотезы скейлинга и универсальности критического поведения (см., например,[I]). Непосредственно в критической точке T = Tc корреляционный радиус бесконечен, а соответствующая теория поля является безмассовой и обнаруживает, в своей инфракрасной асимптотике, инвариантность относительно масштабных преобразований

$$x^\mu \to \lambda x^\mu, \qquad (I.I)$$

(где x^μ - координаты пространства, μ = I, 2 ..., $\mathfrak{D}$), при условии, что поля Φ_ℓ, описывающие локальные флуктуации термодинамических характеристик системы, преобразуются при (I.I)

$$\Phi_\ell \to \lambda^{-d_\ell} \Phi_\ell, \qquad (I.2)$$

где показатели d_ℓ - аномальные масштабные размерности. Вычисление спектра $\{d_\ell\}$ аномальных размерностей - важнейшая задача теории, поскольку именно эти величины определяют характер критических особенностей термодинамических функций [I].

В настоящее время свойства универсальности и скейлинга лучше всего поняты на языке ренормализационной группы (РГ) (см. [2]). В этом подходе критические сингулярности связаны с существованием неподвижных точек РГ в "пространстве эффективных взаимодействий" S [2]. Неподвижная точка - это, по существу, теория поля, обладающая симметрией (I.I) на всех масштабах. Критическое поведение целиком определяется характеристиками соответствующей неподвижной точки. Хотя неподвижные точки с достаточно большой размерностью "неустойчивого многообразия" [2], определяющие так называемые "мультикритические точки", весьма трудно обнаружить в экспериментальной ситуации, исследование всех неподвижных точек представляет принципиальный интерес как первый этап общего анализа топологических свойств РГ.

В 1970 г. Поляков [3] высказал гипотезу, что критические флуктуации обладают не только масштабной, но и конформной инвариантностью. Конформные преобразования - это также преобразования координат

$$x^{\mu} \to y^{\mu}(x), \tag{I.3}$$

не меняющие углы между любыми двумя векторами в данной точке (но могут менять их длину). Другими словами

$$dy_{\mu}\, dy^{\mu} = \frac{\partial y_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = \rho(x)\, dx_{\mu}\, dx^{\mu}. \tag{I.4}$$

В действительности, в однородных и изотропных системах, конформная симметрия следует из масштабной инвариантности при условии локальности взаимодействия. Таким образом, классификация неподвижных точек РГ эквивалентна построению всех конформно-инвариантных решений теории поля.

Поляков [4] предложил "бутстрапную" программу построения таких решений, основанную на гипотезе алгебры операторных разложений (или алгебры локальных полей). Согласно этой гипотезе [5-7], в теории поля существует некоторый бесконечный "базисный" набор локальных полей $A_j(x)$ (включающий локальный параметр порядка), такой, что любые флуктуирующие величины (например произведение компонент параметра порядка, взятых в разных точках пространства) можно разложить по этому базису. Таким образом, поля A_j образуют алгебру относительно операторных разложений

$$A_i(x) A_j(0) = \sum_{k} C_{ij}^{k}(x) A_k(0), \tag{I.5}$$

где $C_{ij}^{k}(x)$ - числовые функции. Разложения (I.5) следует понимать как соотношения между корреляционными функциями

$$\langle X \rangle = \langle A_{j_1}(x_1) A_{j_2}(x_2) \ldots A_{j_N}(x_N) \rangle. \tag{I.6}$$

Предполагается, что ряд (I.5), например для произведения $A_{j_1}(x_1) A_{j_2}(x_2)$ в (I.6), сходится, если $|x_1 - x_2| < \min |x_k - x_2|$; $k = 3, 4, \ldots, N$. Набор полей $\{A_j\}$ можно рассматривать как базис бесконечномерного векторного пространства $\mathcal{A}$ ("пространства локальных полей"), служащее в этом подходе заменой традиционного пространства состояний. Очевидно, вся информация о теории поля сосредоточена в "структурных функциях" $C_{ij}^{k}(x)$. Основные "динамические уравнения" в данном подходе возникают из требования ассоциативности алгебры операторных разложений (I.5), которое равносильно условию перекрестной симметрии корреляционных функций (I.6) [4, 8]. Комбинируя это условие с требованием конформной инвариантности операторной алгебры (I.5), Поляков [4] получил систему "бутстрапных" уравнений на аномальные размерности d_j и "структурные константы" C_{ij}^{k}. Однако, в многомерном случае $\mathcal{D} > 2$, классификация полей по представлениям конформной группы оказывается недостаточной для полного "расщепления" бутстрапных уравнений.

В то время как при $\mathcal{D} > 2$ конформная группа (изоморфная $O(\mathcal{D}+2)$) имеет конечную размерность, конформная группа двумерного пространства бесконечномерна. Чтобы убедиться в этом, удобно ввести комплексные координаты

$$z = x^1 + i x_2 \; ; \quad \bar{z} = x^1 - i x_2 . \tag{I.7}$$

Тогда любая подстановка вида

$$z \to \zeta(z) \; ; \quad \bar{z} \to \bar{\zeta}(\bar{z}), \tag{I.8}$$

где ζ и $\bar{\zeta}$ - произвольные функции, удовлетворяет (I.4). Отметим здесь, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ координаты (I.7) связаны соотношением $\bar{z} = z^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Удобно, однако, перейти в комплексное пространство $\mathbb{C}^2$ (корреляционные функции (I.6) аналитически продолжаются в некоторую область в $\mathbb{C}^2$), где z и $\bar{z}$ принимают независимые комплексные значения ($\mathbb{R}^2$ является некоторым вещественным сечением $\mathbb{C}^2$). При этом ζ и $\bar{\zeta}$ в (I.8) становятся независимыми функциями, а конформную группу можно рассматривать как прямое произведение $\Gamma \times \bar{\Gamma}$ "правой" и "левой" групп аналитических подстановок переменных z

и $\bar{\mathcal{Z}}$. Бесконечномерная симметрия (I.8) позволяет продвинуться в исследовании двумерной конформной теории поля гораздо дальше, чем в многомерном случае [8].

Генераторы преобразований симметрии (I.8) в конформной теории поля являются интегралами движения. Генераторы L_n; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ "правой" группы образуют бесконечномерную алгебру Вирасоро V с перестановочными соотношениями

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{C}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad \text{(I.9)}$$

(генераторы $\bar{L}_n$ "левой" симметрии образуют такую же алгебру $\bar{V}$ и перестановочны с L_m, так что полная алгебра симметрии конформной теории поля есть $V \times \bar{V}$), где число C называется центральным зарядом; это число является важнейшей характеристикой теории.

Алгебра Вирасоро (I.9) хорошо известна в теории релятивистских струн (см., например, [9, I0]). На самом деле, теория релятивистских струн, интенсивно развивающаяся последние два десятилетия, предоставляет очень интересные модели двумерной конформной теории поля. Современное развитие двумерной конформной теории поля в большой степени связано с достижениями струнной теории [I0]. Можно сказать и наоборот: струнная проблематика, например попытки достичь понимания "струнной физики" вне критической размерности, инициированные работами Полякова [II, I2], или проблема компактификации "лишних" пространственных измерений в теории суперструны [I3], являются важнейшим стимулом этого развития.

Разложение на неприводимые представления алгебры $V \times \bar{V}$ дает возможность весьма детально описать структуру пространства $\mathcal{A}$ конформной теории и позволяет получить ряд явных решений уравнений конформного бутстрапа [8]. В [8] построена бесконечная серия точных решений двумерной конформной теории поля – "минимальных моделей"; соответствующие пространства $\mathcal{A}$ содержат лишь конечное число неприводимых представлений $V \times \bar{V}$. Минимальные модели $\mathcal{M}(P/q)$ нумеруются двумя взаимнопростыми натуральными числами и отвечают значениям

$$C(P/q) = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}. \quad \text{(I.10)}$$

Простейшие из минимальных моделей $\mathcal{M}(3/4)$ и $\mathcal{M}(5/6)$ описывают из-

вестные критические точки модели Изинга и трехпозиционной модели Поттса [8, I4], а $\mathcal{M}(4/5)$ и $\mathcal{M}(6/7)$ – соответствующие трикритические точки [I5].

Роль условия унитарности в двумерной конформной теории поля была выяснена в [I5]. Теория поля называется унитарной, если соответствующее пространство состояний (пространство полей $\mathcal{A}$) допускает положительно определенную метрику [I6]. Условие унитарности должно выполняться для статистических систем с "локальным" (взаимодействие ближайших соседей) вещественным ограниченным снизу гамильтонианом (точнее говоря, достаточно существования самосопряженной матрицы перехода). В конформной теории поля условие унитарности приводит к правилу отбора допустимых представлений алгебры Вирасоро: эти представления не должны содержать состояний отрицательной нормы ("духов"). В [I5] показано, что в области $C < 1$ это условие отбирает следующий дискретный ряд значений C (и соответствующих аномальных размерностей)

$$C_p = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \quad \text{(I.II)}$$

в точности отвечающий "минимальным моделям" $\mathcal{M}(P/q)$ с $q = p + 1$, $p = 3, 4, 5, \ldots$. Модели $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}(P/p+1)$, следовательно, исчерпывают все унитарные решения конформной теории поля с $C < 1$; остальные модели $\mathcal{M}(P/q)$ с $q - p > 1$ неунитарны. Следует отметить, однако, что существует много интересных статистических систем, для которых условие унитарности заведомо не выполнено*). Поэтому неунитарные решения конформного бутстрапа также заслуживают изучения.

В некотором смысле, величину C можно интерпретировать как меру эффективного числа полевых степеней свободы, имеющих крупномасштабные флуктуации в данной критической точке. Поэтому естественно ожидать, что неподвижные точки РГ тем более устойчивы, чем меньше соответствующее значение C. Величина C как центральный заряд в (I.9) определена только в неподвижных точках. Можно, однако, "продолжить" ее на произвольные точки "пространства эффективных взаимодействий" S, т.е. ввести функцию $C(g)$, где g – точка S,

---

*) Известными примерами являются задача о несамопересекающихся полимерных цепях, магнетики со случайным взаимодействием и т.п.

совпадающую в каждой неподвижной точке g_{*A} с соответствующим центральным зарядом: $C(g_{*A}) = C_A$. При движении пространства под действием преобразований РГ $g(t)$ величина $C(g)$ становится, конечно, функцией РГ параметра t : $C(g(t))$. В унитарной теории поля функцию $C(g)$ можно выбрать так, что $C(g)$ монотонно убывает под действием РГ, т.е. $\frac{d}{dt} C(g(t)) \leqslant 0$, причем равенство достигается только в неподвижных точках [17]. Таким образом, упорядочение неподвижных точек по величине C соответствует их РГ стабильности. Более подробно этот вопрос обсуждается в § 2.

Значение C = I соответствует свободному безмассовому бозонному полю, т.е. гауссовой неподвижной точке. Такая теория содержит параметр (который можно интерпретировать как "радиус компактификации" поля φ), а критические показатели непрерывно зависят от этого параметра, так что здесь мы имеем дело с линией неподвижных точек. Эта линия соответствует критической линии модели Ашкина-Теллера (или восьмивершинной модели Бакстера) [18]. В [31] построено однопараметрическое семейство решений конформного бутстрапа для спиновых корреляций модели Ашкина-Теллера. При $C \geqslant 2$ возможны многообразия неподвижных точек размерности > I.

Конформная теория поля может обладать (и, как правило, обладает) более высокой, чем конформная, бесконечной симметрией. Исследование таких "высших" симметрий позволяет строить новые решения конформной теории поля. Так, в [19-21] исследована двумерная теория поля с суперконформной симметрией (ее генераторы образуют алгебру Невье-Шварца-Рамона, содержащую подалгебру $\mathcal{V}$) и построены соответствующие суперконформные "минимальные модели". Аналогично (I.II), существует унитарная серия таких "минимальных моделей" [15, 21] $S\mathcal{M}_p$; p = 3, 4, 5 ... с

$$c_p = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8}{p(p+2)}\right). \tag{I.12}$$

Другой пример - $G \times G$ инвариантная модель кирального поля с действием Весса-Зумино (WZ) [22-24]. В инфракрасной неподвижной точке [23, 24] эта модель обладает симметрией относительно $\hat{G} \times \hat{G}$ алгебры токов (т.е. прямого произведения алгебр Каца-Муди) и конформной инвариантностью с

$$C(G, k) = \frac{k\, \mathcal{D}(G)}{k + C_V}, \tag{I.13}$$

где C_V - квадратичный оператор Казимира для присоединенного представления, $\mathcal{D}(G)$ - размерность (полупростой) группы G, а k - центральный заряд алгебры токов [25]. В приведенных примерах "высшие" симметрии генерируются локальными токами: "супертоком" спина 3/2 в суперконформной теории и токами спина I в моделях WZ. Симметрии, генерируемые локальными токами более высоких спинов, рассмотрены в [26]. Возможны также "высшие" симметрии, генерируемые нелокальными ("парафермионными") токами; такие поля естественно возникают в статистических системах с дискретной циклической симметрией [27]. Исследование представлений алгебр таких нелокальных токов позволяет найти новые конформно-инвариантные решения теории поля [28-30]. Некоторые из этих решений рассмотрены в следующих параграфах.

Таким образом, в настоящее время известно несколько бесконечных серий точных решений двумерной конформной теории поля и существуют методы построения новых решений, имеется даже надежда найти на этом пути полную классификацию таких решений, или, другими словами, полную классификацию всех неподвижных точек РГ. Следует отметить, однако, что исчерпывающий анализ неподвижной точки должен включать, кроме построения соответствующей конформной теории поля, также вычисление соответствующего класса универсальности, т.е., по существу, описание структуры РГ в некоторой окрестности этой точки. В ряде случаев такое вычисление можно провести в рамках теории возмущений. Этот круг вопросов также обсуждается ниже.

§2. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Пространственные симметрии в теории поля обеспечиваются существованием локального симметричного тензора энергии-импульса (тензора напряжений в статистической физике) $T^{\mu\nu}(x) \in \mathcal{A}$, удовлетворяющего уравнению

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{2.1}$$

В лагранжевой теории поля $T^{\mu\nu}(x)$ описывает вариацию (евклидова) действия $H = \int \mathcal{H}(x) d^2x$

$$\frac{1}{2}\delta_\varepsilon H = \int d^2x\, \partial_\mu \varepsilon_\nu(x)\, T^{\mu\nu}(x) \qquad (2.2)$$

при бесконечномалых преобразованиях координат

$$x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x). \qquad (2.3)$$

Это утверждение равносильно следующим соотношениям для корреляционных функций (I.6)

$$\sum_{i=1}^{N} \langle A_1(x_1) \ldots \delta_\varepsilon A_i(x_i) \ldots A_N(x_N)\rangle - 2\int d^2x\, \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) \langle T^{\mu\nu}(x) A_1(x_1) \ldots A_N(x_N)\rangle = 0 \quad (2.4)$$

где $\delta_\varepsilon A(x)$ – вариации самих полей A(x) при преобразовании (2.3). Вариация $\delta_\varepsilon A(x)$ также является локальным полем, т.е. $\delta_\varepsilon A \in \mathcal{A}$, и линейно зависит от функции $\varepsilon^\mu(x)$ и ее производных конечного порядка, взятых в точке x. Если содержательная лагранжева формулировка теории неизвестна, соотношение (2.4) следует постулировать; в этом случае оно служит, в действительности, Матрич- определением линейного оператора δ_ε, действующего в $\mathcal{A}$. ные элементы этого оператора нетрудно выразить через коэффициенты $C_{ij}^{k}(x)$ операторных разложений (I.5), если заметить, что в силу (2.I), подынтегральное выражение во втором члене в (2.4) представляется в дивергентном виде. Поэтому можно написать

$$\frac{1}{2}\delta_\varepsilon A(x) = \int_{\partial\Lambda_x} dy^\lambda \epsilon_{\mu\lambda} \varepsilon_\nu(y) T^{\mu\nu}(y) A(x) + \int_{\Lambda_x} d^2y\, \partial_\mu \varepsilon_\nu(y) T^{\mu\nu}(y) A(x), \quad (2.5)$$

где Λ_x – произвольная окрестность точки x в $\mathbb{R}^2$, $\partial\Lambda_x$ – ее граница а $\epsilon_{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор, $\epsilon_{12} = 1$. Правая часть (2.5) не зависит от выбора Λ_x, в частности, эта область может быть сделана сколь угодно малой, в соответствии с утверждением о локальной зависимости $\delta_\varepsilon A(x)$ от $\varepsilon^\mu(x)$.

В простейших случаях трансляций $\varepsilon^\mu(x) = \varepsilon^\mu$ и поворотов $\varepsilon^\mu(x) = \omega^{\mu\nu} x_\nu$; $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, второй член в правой части (2.5) исчезает (что отражает евклидову инвариантность теории), а соответствующие операторы δ_ε сводятся к операторам импульса и момента

$$\delta_\varepsilon A(x) = \varepsilon^\mu \partial_\mu A(x) + \omega^{\mu\nu}(x_\mu \partial_\nu + \epsilon_{\mu\nu}\Sigma) A(x), \qquad (2.6)$$

если $\varepsilon^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$, где оператор Σ — спин поля

A (x). Базисные векторы A_j в $\mathcal{A}$ удобно выбирать так, чтобы $\Sigma A_j = s_j A_j$, где s_j – целые (для бозе-полей) или полуцелые (для ферми-полей) числа. В дальнейшем мы обозначаем $\mathcal{A}^{(0)} \in \mathcal{A}$ подпространство, состоящее из бесспиновых полей, $\Sigma \mathcal{A}^{(0)} = 0$.

Другой важный вид координатных преобразований (2.3) – однородные растяжения. Обозначим D как соответствующий оператор, действующий в $\mathcal{A}$, а именно,

$$\delta_\varepsilon A(x) = \varepsilon \cdot (x^\mu \partial_\mu + D) A(x), \qquad (2.7)$$

если $\varepsilon^\mu(x) = \varepsilon \cdot x^\mu$. В этом случае (2.4) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \left\langle \left(x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + D^{(i)}\right) A_1(x_1) \ldots A_N(x_N)\right\rangle + 2\int d^2x \langle \Theta(x) A_1(x_1) \ldots A_N(x_N)\rangle = 0 \quad (2.8)$$

где $D^{(i)}$ обозначает оператор D, примененный к полю $A_i(x_i)$, а $\Theta = -T^{\mu\mu}$ – след тензора напряжений. Отметим, что интеграл в (2.8) может расходиться при $x \to x_i$; в этом случае соответствующие матричные элементы оператора D содержат зависимость от параметра обрезания R_0. Поведение теории поля при масштабных преобразованиях описывается ренормализационной группой. Варианты метода РГ в теории поля и статистической физике изложены во многих учебниках (например, [2]). Здесь мы обсудим специфические свойства РГ в двумерной теории поля.

Основным понятием РГ является "пространство локальных взаимодействий" S [2]. В лагранжевой теории поля это – многообразие функционалов действия $H[\varphi] = \int \mathcal{H}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))\, d^2x$, учитывающих условие локальности взаимодействия. Обычно предполагают, что теория снабжена ультрафиолетовым обрезанием; при этом условие локальности может нарушаться на расстояниях $\sim R_0$. Вообще говоря, "пространство взаимодействий" S бесконечномерно. Тем не менее, предположим, что с ним можно обращаться как с конечномерным многообразием; обычно это оправдывается тем, что существенными оказываются лишь конечномерные подмногообразия [2]. Пусть $\{g^a\} = \{g^1, g^2, \ldots\}$ некоторая система координат в S (соответственно точки S будем обозначать как g). Это означает, что плотность действия H(x) есть функция некоторого (вообще говоря, бесконечного) набора параметров g^a ("констант связи"), т.е. $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_g(x)$. Производные

$$\Phi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{H}_g(x)}{\partial g^a}. \qquad (2.9)$$

являются локальными полями, т.е. $\Phi_a \in \mathcal{A}_g$, где индекс g указывает, что данное пространство отвечает точке $g \in S$. Рассматривая только однородные и изотропные взаимодействия, будем считать все поля бесспиновыми, т.е. $\Phi_a \in \mathcal{A}_g^{(0)}$. Таким образом, пространство $\mathcal{A}_g^{(0)}$ можно рассматривать как касательное к S в точке g. Для корреляционных функций (I.6) этому соответствуют сооотношения

$$\frac{\partial}{\partial g^a}\langle A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle_g = \sum_{i=1}^{N}\langle A_1(x_1)\dots B_a A_i(x_i)\dots A_N(x_N)\rangle_g - \\ - \int d^2x \langle \Phi_a(x) A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle_g , \qquad (2.10)$$

где оператор B_a учитывает возможную явную зависимость полей A от g : $B_a A = \frac{\partial}{\partial g^a} A$. Необходимость введения такой зависимости очевидна в тех случаях, когда интеграл в (2.I0) расходится при $x \to x_i$. Соответствующие матричные элементы операторов B_a должны содержать зависимость от R_0 с тем, чтобы компенсировать расходящийся вклад интеграла, поскольку мы подразумеваем, что (I.6) - "перенормированные" корреляционные функции, не зависящие от R_0. След тензора напряжений Θ лежит в $\mathcal{A}_g^{(0)}$ и может быть разложен по базисным векторам (2.9)

$$\Theta(x) = \sum_a \beta^a(g)\Phi_a(x), \qquad (2.11)$$

где коэффициенты $\beta^a(g)$, являющиеся, очевидно, компонентами векторного поля на S, называются β -функциями. Комбинируя (2.8) и (2.I0), нетрудно получить уравнения РГ в форме Каллана-Симанчика

$$\sum_{i=1}^{N}\langle\left(\tfrac{1}{2}x_i^\mu \tfrac{\partial}{\partial x_i^\mu} + \gamma^{(i)}(g)\right)A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle = \\ = \sum_a \beta^a(g)\frac{\partial}{\partial g^a}\langle A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle, \qquad (2.12)$$

где линейный оператор $\gamma^{(i)}(g)$, определенный формулой

$$\gamma(g) = \tfrac{1}{2}D - \beta^a(g)B_a , \qquad (2.13)$$

действует в (2.I2) на поле $A_i(x_i)$. Оператор $\gamma(g)$ называется матрицей аномальных размерностей. Проверяя совместность уравнений (2.8) и (2.I0) можно показать, что оператор $\gamma(g)$ следующим образом действует на базисные векторы (2.9)

$$\gamma(g)\Phi_a = \gamma_a^b(g)\Phi_b = \left(\delta_a^b + \frac{\partial\beta^b}{\partial g^a}\right)\Phi_b . \qquad (2.14)$$

Это соотношение равносильно важному утверждению об отсутствии перенормировок компонент тензора энергии-импульса, т.е.

$$\gamma(g)T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \qquad (2.15)$$

В перенормированной теории ни β^a, ни матричные элементы оператора γ не зависят от R_0. Из (3.I4) ясно, что две теории поля, отвечающие двум точкам $g(t_1)$ и $g(t_2)$ одной интегральной кривой уравнений Гелл-Мана-Лоу,

$$dg^a = \beta^a(g)\,dt, \qquad (2.16)$$

отличаются лишь масштабным преобразованием $x_\mu \to e^{\frac{(t_1-t_2)}{2}}x^\mu$. Масштабное поведение теории поля зависит, таким образом, от особенностей и глобальных топологических свойств векторного поля $\beta^a(g)$. Простейшие (и самые важные) особенности этого векторного поля - неподвижные точки g_{*A}: $\beta(g_{*A}) = 0$ (индекс A нумерует неподвижные точки). Неподвижные точки могут быть изолированными, но могут и образовывать подмногообразия в S размерности, большей нуля. Критическое поведение статистических систем непосредственно связано с неподвижными точками РГ, как объяснено, например, в [2].

Будем предполагать, что рассматриваемая теория поля удовлетворяет условию положительности (см. [16]). Это означает, в частности, что любая метрика $G_{ab}(g,R)$ в $\mathcal{A}_g^{(0)}$, определяемая двухточечными функциями

$$G_{ab}(g,R) = \langle\Phi_a^+(R)\,\Phi_b(0)\rangle_g , \qquad (2.17)$$

положительно определена. В дальнейшем предполагается, что координаты g^a вещественны, а $\Phi_a^+ = \Phi_a$. Оказывается, что условие положительности приводит к определенным ограничениям на свойства РГ в двумерной теории.

Определим поля T и $\overline{T}$ как следующие компоненты тензора $T^{\mu\nu}$

$$T = T^{11} - T^{22} + 2i\,T^{12}\ ;\ \overline{T} = T^{11} - T^{22} - 2i\,T^{12}, \qquad (2.18)$$

удовлетворяющие уравнениям $\Sigma T = 2T$; $\Sigma \bar{T} = -2\bar{T}$.
Уравнения движения (2.I) в этих обозначениях переписываются в виде

$$\partial_{\bar{z}} T = \partial_z \Theta \; ; \; \partial_z \bar{T} = \partial_{\bar{z}} \Theta , \qquad (2.19)$$

где z и $\bar{z}$ - комплексные координаты (I.7), а $-\Theta = T^{11} + T^{22}$.
Рассмотрим двухточечные функции

$$\langle T(z,\bar{z})\, T(0,0)\rangle = F(t)/z^4 ; \qquad (2.20)$$

$$\langle T(z,\bar{z})\,\Theta(0,0)\rangle = H(t)/z^3\bar{z} \; ; \langle \Theta(z,\bar{z})\,\Theta(0,0)\rangle = G(t)/(z\bar{z})^2 ,$$

где $t = \log(z\bar{z})$. Из уравнений (2.I9) вытекают следующие соотношения для функций F, H, G :

$$\dot{F} = \dot{H} - 3H \; ; \quad \dot{H} - H = \dot{G} - 2G , \qquad (2.21)$$

где точка обозначает производную по t. Введем величину

$$C = 2F + 4H - 6G . \qquad (2.22)$$

Уравнение

$$\dot{C} = -12G \qquad (2.23)$$

является простым следствием (2.2I). Поскольку $G(t) \geq 0$ вследствие положительной определенности метрики (2.I7), уравнение (2.23) показывает, что C (t) - монотонно убывающая функция t. Равенство $G(t) = 0$ достигается тогда, когда $\Theta = \beta^a \Phi_a = 0$, т.е. в теории, отвечающей неподвижной точке; в этом случае C является константой.

Функции C (t) можно придать смысл меры числа степеней свободы, имеющих, с заметной вероятностью, флуктуации с пространственным размером $e^{t/2}$, поэтому вывод об убывании этой величины представляется естественным. В неподвижной точке равенство C (t) = $Const$ отражает масштабную инвариантность флуктуаций. Если фиксировать t, скажем, положить $t = 0$, то величина C будет зависеть только от "констант связи" g^a. При этом из уравнений ренормгруппы (2.I2) и (2.I5) нетрудно вывести

$$\beta^a(g)\frac{\partial}{\partial g^a}C(g) = -12\, G_{ab}(g)\,\beta^a(g)\,\beta^b(g) \leq 0 , \qquad (2.24)$$

где $G_{ab}(g) \equiv G_{ab}(g,1)$ - положительно определенная метрика (2.I7). Это соотношение показывает, что "поток ренормгруппы", описываемый уравнениями (2.I6), приводит к убыванию функции C(g), причем стационарные точки C (g) представляют собой неподвижные точки РГ, т.е. $\partial C(g)/\partial g = 0 \Rightarrow \beta(g) = 0$.
После того, как в следующих параграфах будут рассмотрены общие свойства конформных теорий поля, отвечающих неподвижным точкам, мы сумеем доказать и обратное: каждая неподвижная точка g_{*A} является стационарной для C (g).

Таким образом, каждая неподвижная точка g_{*A} характеризуется константой C_A - значением C (g) в этой точке

$$C_A = C(g_{*A}) . \qquad (2.25)$$

В неподвижной точке, ввиду (2.II), поле Θ обращается в нуль. При этом функции G и H в (2.20) исчезают, а двухточечная функция

$$\langle T(z,\bar{z})\, T(0,0)\rangle_{g_{*A}} = \frac{C_A}{2z^4} \qquad (2.26)$$

полностью выражается через константу (2.25). Эта константа является важной характеристикой конформной теории поля, описывающей неподвижную точку g_{*A} ; она совпадает с центральным зарядом алгебры Вирасоро (I.9).

Приведенные выше соотношения имеют два очевидных следствия:

а). Если две неподвижные точки g_{*1} и g_{*2} соединены траекторией РГ $g(t)$ так, что $g(-\infty) = g_{*1}$; $g(\infty) = g_{*2}$, то соответствующие константы (2,25) связаны неравенством

$$C_2 < C_1 ; \qquad (2.27)$$

б). Если имеется непрерывное многообразие неподвижных точек $\mathcal{U}_* \subset S$, то все точки этого многообразия характеризуются одним и тем же значением C.

§3. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В неподвижной точке РГ $\Theta = 0$ и уравнения (2.19) принимают вид

$$\partial_{\bar z} T = 0 \quad ; \quad \partial_z \bar T = 0. \tag{3.1}$$

Ввиду (3.1), мы будем писать $T = T(z)$; $\bar T = \bar T(\bar z)$. Уравнения (3.1) означают, что, например, корреляционная функция

$$\langle T(z) A_1(z_1,\bar z_1) \ldots A_N(z_N,\bar z_N)\rangle \tag{3.2}$$

является однозначной аналитической функцией с особенностями – полюсами конечного порядка – в точках $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Вычеты в этих полюсах определяются вариациями $\delta_\varepsilon A_i$ полей A_i при бесконечномалых конформных преобразованиях (1.8)

$$z \to z + \varepsilon(z) \; ; \quad \bar z \to \bar z + \bar\varepsilon(\bar z). \tag{3.3}$$

Действительно, для таких преобразований второй член в (2.5) выпадает (при $\Theta = 0$), и мы имеем

$$\delta_\varepsilon A(z,\bar z) = \oint\limits_{C_z} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \varepsilon(\zeta) T(\zeta) A(z,\bar z), \tag{3.4}$$

где интегрирование идет по контуру, окружающему точку z . Таким образом, компоненты T и $\bar T$ тензора энергии-импульса представляют генераторы "правых" и "левых" конформных преобразований в теории поля. Удобно, разлагая функцию $\varepsilon(\zeta)$ в (3.4) в ряд Лорана вблизи точки z , ввести бесконечный базис операторов

$L_n = \delta_{\varepsilon_n}$; $\varepsilon_n(\zeta) = (\zeta - z)^{n+1}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

эти операторы действуют в пространстве полей $\mathcal{A}$. Эквивалентным определением этих операторов может служить операторное разложение

$$T(z_1) A(z_2,\bar z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_1 - z_2)^{-n-2} L_n A(z_2,\bar z_2), \tag{3.5}$$

где A – любое поле из $\mathcal{A}$. Аналогичным образом вводятся операторы $\bar L_n$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Сравнивая это определение с (2.6), (2.7) и (2.13), легко понять, что

$$L_{-1} A(z,\bar z) = \partial_z A(z,\bar z); \; \bar L_{-1} A(z,\bar z) = \partial_{\bar z} A(z,\bar z);$$
$$L_0 - \bar L_0 = \Sigma \quad ; \quad L_0 + \bar L_0 = D = 2\gamma(g_*). \tag{3.6}$$

Базис $\{ A_j \}$ в $\mathcal{A}$ удобно выбрать так, чтобы

$$L_0 A_j = \Delta_j A_j \quad ; \quad \bar L_0 A_j = \bar\Delta_j A_j \, , \tag{3.7}$$

где вещественные числа (Δ_j , $\bar\Delta_j$) называются "правой" и "левой" размерностями; очевидно, $s_j = \Delta_j - \bar\Delta_j$ есть спин, а $d_j = \Delta_j + \bar\Delta_j$ – аномальная масштабная размерность (1.2) поля A_j .

Учитывая (2.15) и (3.6), можно написать общее выражение для вариации $\delta_\varepsilon T$ при преобразовании (3.3):

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z) T'(z) + 2\varepsilon'(z) T(z) + \frac{c}{12}\varepsilon'''(z); \tag{3.8a}$$

$$\delta_{\bar\varepsilon} T(z) = 0, \tag{3.8б}$$

где штрих обозначает производную, а постоянная C не фиксируется общими требованиями симметрии и является параметром теории. Выражение (3.8a) равносильно следующей форме операторного разложения:

$$T(z_1) T(z_2) = \frac{c}{2(z_1 - z_2)^4} + \frac{2}{(z_1 - z_2)^2} T(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2} T'(z_2) + reg, \tag{3.9}$$

где reg обозначает вклад членов, регулярных при $z_1 \to z_2$. Перестановочные соотношения (1.9) между операторами L_n легко выводятся из (3.9). Такие же формулы (3.8), (3.9), с очевидными модификациями, справедливы, конечно, для поля $\bar T(\bar z)$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением теории, инвариантной относительно пространственных отражений, при этом $\bar c = c$. Коммутативность операторов L_n и $\bar L_m$ следует из (3.8б). Отметим, что в бесконечной системе $\langle T\rangle = 0$ и из (3.9) вытекает выражение (2.26) для двухточечной функции $\langle T \; T \rangle$. Таким образом, "центральный заряд" C в (1.9) совпадает со значением $c = c(g_*)$ функции C (g), введенной в §2.

Из (1.9) видно, что оператор L_n понижает "правую" размерность на n единиц. Поэтому в пространстве $\mathcal{A}$ любой конформной теории должны существовать "первичные" поля Φ_l , удовлетворяющие уравнениям

$$L_n \Phi_\ell = \bar{L}_n \Phi_\ell = 0 \quad \text{для} \quad n>0;$$
$$L_0 \Phi_\ell = \Delta_\ell \Phi_\ell \;;\; \bar{L}_0 \Phi_\ell = \bar{\Delta}_\ell \Phi_\ell \;; \tag{3.10}$$

в противном случае спектр аномальных размерностей $\{d_j\}$ не ограничен снизу. Нетривиальная теория содержит несколько (или даже бесконечно много) первичных полей; индекс ℓ введен для их нумерации. Сингулярные члены операторных разложений (3.5) для первичных полей имеют вид

$$T(z_1)\Phi_\ell(z_2,\bar{z}_2) = \frac{\Delta_\ell}{(z_1-z_2)^2}\Phi_\ell(z_2,\bar{z}_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\Phi_\ell(z_2,\bar{z}_2) + reg, \tag{3.11}$$

откуда видно, что первичные поля особенно просто преобразуются при подстановках (1.8):

$$\Phi_\ell(z,\bar{z}) = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\Delta_\ell}\left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{\Delta}_\ell}\Phi(\zeta,\bar{\zeta}). \tag{3.12}$$

Поля, получаемые применением операторов L_n, $\bar{L}_n$ с $n<0$ к Φ_ℓ ("конформные потомки" поля Φ_ℓ)

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_N} \bar{L}_{-m_1} \dots \bar{L}_{-m_M} \Phi_\ell \tag{3.13}$$

составляют пространство $[\Phi_\ell] \in \mathcal{A}$ – "конформный класс" поля Φ_ℓ. Размерности полей (3.13) отличаются от $(\Delta_\ell, \bar{\Delta}_\ell)$ на положительные целые числа. Вообще говоря, пространство, натянутое на все векторы вида (3.13), является базисом неприводимого представления $V \times \bar{V}$. Это утверждение несправедливо, если Δ_ℓ или $\bar{\Delta}_\ell$ принимает специальные значения (см. §4), однако и в этих случаях можно получить неприводимое представление, факторизуя пространство (3.13) по соответствующему инвариантному подпространству. Во всех случаях "конформным классом" $[\Phi_\ell]$ называется именно неприводимое представление. Ввиду коммутативности $[L_n, L_m] = 0$ конформный класс можно рассматривать как прямое произведение

$$[\Phi_\ell] = [\Delta_\ell] \otimes [\bar{\Delta}_\ell] \tag{3.14}$$

неприводимых представлений $[\Delta_\ell]$ и $[\bar{\Delta}_\ell]$ алгебр V и $\bar{V}$ соответственно; каждое из этих представлений вполне характеризуется значением соответствующей размерности Δ_ℓ или $\bar{\Delta}_\ell$. Пространство полей конформной теории является суммой конформных классов

$$\mathcal{A} = \bigoplus_\ell [\Phi_\ell]. \tag{3.15}$$

В пространстве (3.15) конформной теории поля можно ввести метрику, полагая (в бесконечной системе)

$$(A_1, A_2) = \lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle e^{zL_0} e^{\bar{z}\bar{L}_0} A_1^+(z,\bar{z}) A_2(0,0)\rangle, \tag{3.16}$$

которая, очевидно, связана с (2.17) регулярным конформным преобразованием. В этой метрике

$$L_n^+ = L_{-n} \;;\; \bar{L}_n^+ = \bar{L}_{-n}, \tag{3.17}$$

а первичные поля Φ_ℓ можно выбрать так, что

$$(\Phi_\ell, \Phi_{\ell'}) = \delta_{\ell,\ell'}. \tag{3.18}$$

В унитарной теории метрика (3.16) должна быть положительно определена [15].

Единичный оператор I является, конечно, первичным полем с размерностями (0,0) (причем $T, \bar{T} \in [I]$). Вообще, можно показать (в унитарной теории), что любое поле Ψ с нулевой "левой" размерностью $\bar{\Delta} = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} \Psi = 0 \tag{3.19}$$

(для поля $\bar{\Psi}$ с $\Delta = 0$ выполняется такое же уравнение (3.19) относительно z); примером может служить (3.1). Следовательно, любое поле с $\bar{\Delta} = 0$ порождает бесконечный набор интегралов движения. Свойством (3.19) обладают все поля, лежащие в подпространстве $[0]$, определяемом разложением (3.14) конформного класса $[I]$. Соответствующие интегралы движения имеются в любой конформной теории поля. Подпространство $[0]$ включает $T(z)$ и всевозможные "составные" поля, которые можно получить "слияниями" $T(z)$. Простейшие из них используются в дальнейшем, поэтому введем для них специальные обозначения. Поле

$$T_4 = \left(L_{-2}^2 - \tfrac{3}{5} L_{-4}\right) I \tag{3.20}$$

имеет размерности (4,0) (спин 4). Это поле - первый из опущенных в (3.9) регулярных членов

$$T(z_1)T(z_2) = \dots + \frac{3}{10} T''(z_2) + T_4(z_2) + O(z_1 - z_2), \qquad (3.21)$$

где $O(z_1 - z_2) \to 0$ при $z_1 \to z_2$. Аналогично (3.5), можно ввести операторы Λ_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$T_4(z_1)A(z_2,\bar z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_1 - z_2)^{-n-4} \Lambda_n A(z_2, \bar z_2), \qquad (3.22)$$

причем простое вычисление показывает, что

$$\Lambda_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} : L_k L_{n-k} : + \frac{1}{5} \varkappa_n L_n , \qquad (3.23)$$

где

$$\varkappa_{2k} = (1 - k^2) \ ; \ \varkappa_{2k-1} = (1+k)(2-k). \qquad (3.24)$$

Приведем еще перестановочные соотношения

$$[L_n, \Lambda_m] = (3n - m)\Lambda_{n+m} + \frac{1}{6}\left(\frac{22}{5} + c\right)(n^3 - n) L_{n+m}. \qquad (3.25)$$

Пространство полей спина 6 в [0], отличных от производных T и T_4, двумерно; базисные векторы можно выбрать в виде

$$T_6^{(1)} = \left[L_{-2}^3 - \frac{1}{3} L_{-3}^2 - \frac{19}{15} L_{-4} L_{-2} - \frac{2}{3} L_{-6} \right] I \ ; \qquad (3.26а)$$

$$T_6^{(2)} = \frac{1}{9} \left[-\frac{5}{2} L_{-3}^2 + 4 L_{-4} L_{-2} + \frac{10}{7} L_{-6} \right] I \ . \qquad (3.26б)$$

Требование конформной инвариантности операторной алгебры (I.5) приводит к следующему общему виду операторных разложений произведений первичных полей:

$$\Phi_{\ell_1}(z,\bar z)\Phi_{\ell_2}(0,0) = \sum_{\ell} C_{\ell_1 \ell_2}^{\ell} z^{\Delta_\ell - \Delta_{\ell_1} - \Delta_{\ell_2}} \bar z^{\bar\Delta_\ell - \bar\Delta_{\ell_1} - \bar\Delta_{\ell_2}} [\Phi_\ell(0,0) + \dots] \qquad (3.27)$$

где многоточие в квадратных скобках обозначает вклад всех полей из соответствующего конформного класса. Этот вклад представляет собой ряд по целым положительным степеням z и $\bar z$, причем коэффициенты в этом ряду полностью определяются требованием конформной инвариантности (3.27) [8, 3I]. Числовые коэффициенты $C_{\ell \ell_1 \ell_2} \equiv C_{\ell_1 \ell_2}^{\ell}$ в (3.27) называются структурными константами операторной алгебры. При нормировке (3.I8) величины $C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$

симметричны по всем индексам. Состав (3.I5) пространства $\mathcal{A}$, размерности (Δ_ℓ, $\bar\Delta_\ell$) первичных полей Φ_ℓ и структурные константы $C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$ должны быть подобраны так, чтобы обеспечить ассоциативность алгебры операторных разложений (3.27) [8]. В дальнейшем мы будем часто пользоваться сокращенной записью (3.27)

$$\Phi_{\ell_1} \Phi_{\ell_2} = \sum_{\ell} [\Phi_\ell]. \qquad (3.28)$$

§4. ВЫРОЖДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Пусть Φ_Δ - произвольное первичное поле с "правой" размерностью Δ (ниже мы обсуждаем представления "правой" алгебры V, подразумевая, что представления $\bar V$ обладают такими же свойствами). Обозначим $\mathcal{V}_\Delta$ пространство, натянутое на все векторы вида

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_N} \Phi_\Delta \ ; \ 1 \le n_1 \le n_2 \le \dots \le n_N . \qquad (4.I)$$

Очевидно, $\mathcal{V}_\Delta$ служит базисом некоторого представления V. Это представление, однако, приводимо, если $\mathcal{V}_\Delta$ содержит вектор $\chi_{\Delta+L}$ ("нуль-вектор"), удовлетворяющий уравнениям

$$L_n \chi_{\Delta+L} = 0, \ n > 0 \ ; \ L_0 \chi_{\Delta+L} = (\Delta + L)\chi_{\Delta+L} \qquad (4.2)$$

с некоторым целым $L > 0$. В этом случае подпространство $\mathcal{V}_{\Delta+L} \subset \mathcal{V}_\Delta$, порожденное применением операторов L_n с $n<0$ к $\chi_{\Delta+L}$, инвариантно относительно действия V. Чтобы получить в этом случае неприводимое представление со "старшим вектором" Φ_Δ, следует факторизовать $\mathcal{V}_\Delta$ по инвариантному подпространству $\mathcal{V}_{\Delta+L}$, т.е. положить

$$\chi_{\Delta+L} = 0. \qquad (4.3)$$

Если $\mathcal{V}_\Delta$ содержит несколько независимых нуль-векторов, следует считать равным нулю каждый. Фактор-пространство $[\Delta] = \mathcal{V}_\Delta / \mathcal{V}_{\Delta+L}$ называется "вырожденным" неприводимым представлением V, а число L - уровнем вырождения. В таком случае мы называем также "вырожденным" соответствующий конформный класс $[\Phi_\Delta]$ (3.I4) и само первичное поле Φ_Δ. Если $\mathcal{V}_\Delta$ не содержит нуль-векторов, то $[\Delta] = \mathcal{V}_\Delta$ и поле Φ_Δ "невырожденно".

Простейший случай вырождения — $\Delta = 0$; при этом $L = 1$, $\chi_1 = L_{-1}\Phi_0$. Уравнение (3.19) (точнее, аналогичное уравнение относительно $\bar{z}$), возникающее в этом случае - пример вырождения. Поле Φ_Δ вырождено с $L = 2$, если Δ принимает любое из следующих двух значений:

$$\Delta_{(1,2)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(\alpha_+ + 2\alpha_-)^2 \; ; \; \Delta_{(2,1)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(2\alpha_+ + \alpha_-)^2, \quad (4.4)$$

где

$$\Delta_0 = \frac{c-1}{24} \; ; \; \alpha_\pm = (24)^{-1/2}\left(\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}\right) ; \; \alpha_+\alpha_- = -1. \quad (4.5)$$

При этом нуль-вектор имеет вид

$$\chi_{\Delta+2} = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2\right)\Phi_\Delta . \quad (4.6)$$

Все случаи вырождения представлений V перечисляются формулой Каца [32, 33]

$$\Delta_{(n,m)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2 \; ; \quad L = nm, \quad (4.7)$$

где n, m - любые натуральные числа; в (4.7) справа указан соответствующий уровень вырождения. Обозначим временно $\Phi_{(n,m)}$ вырожденное первичное поле с "правой" размерностью $\Delta_{(n,m)}$. Вырожденные поля обладают рядом важных свойств:

а). Корреляционные функции, содержащие вырожденные поля удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям. Простейший пример - уравнение $\partial_z \Phi_{(1,1)} = 0$ ($\Delta_{(1,1)} = 0$, см. выше). В общем случае эти уравнения можно получить (если известны выражения для соответствующих нуль-векторов), учитывая локальные операторные разложения (3.11) и граничные условия, налагаемые на поле $T(z)$. Например для поля $\Phi_{(1,2)}$ (или $\Phi_{(2,1)}$), в случае бесконечной системы получается [8]

$$\left\{\frac{3}{2(2\Delta+1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right\} \times \quad (4.8)$$
$$\times \langle \Phi_{(1,2)}(z)\, \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N)\rangle = 0,$$

где Φ_i - любые первичные поля с размерностями Δ_i; в (4.8) опущены несущественные здесь аргументы $\bar{z}$. Обобщения (4.8) на случай системы с границей и топологии тора можно найти в [34,35].

б). Вырожденные поля (точнее говоря, вырожденные конформные классы) образуют замкнутую алгебру относительно операторных разложений (1.5). Это утверждение можно получить, исследуя дифференциальные уравнения (4.8), накладывающие, конечно, жесткие ограничения на структуру операторных разложений (3.27). Операторные разложения вырожденных полей имеют следующую структуру [8]

$$\Phi_{(n_1,m_1)}\,\Phi_{(n_2,m_2)} = \sum_{l=0}^{l_1}\sum_{k=0}^{k_1}\left[\Phi_{(n_0+2l,\, m_0+2k)}\right], \quad (4.9)$$

где $n_0 = |n_1 - n_2| + 1$; $m_0 = |m_1 - m_2| + 1$; $l_1 = \min(n_1, n_2) - 1$, $k_1 = \min(m_1, m_2) - 1$; здесь использована сокращенная запись (3.28).

Операторную алгебру вырожденных полей (4.9) можно попытаться интерпретировать как конформную теорию поля. При этом, конечно, следует ограничиться случаем $c < 1$, т.к. в других областях изменения этого параметра спектр размерностей (4.7) или не веществен, или не ограничен снизу. Приемлемые с "физической" точки зрения модели возникают, если величина $\rho = -\alpha_- / \alpha_+$ принимает рациональные значения

$$\rho = -\alpha_-/\alpha_+ = p/q , \quad (4.10)$$

где p и q - любые взаимнопростые натуральные числа. Соответствующие значения С даются формулой (1.10). Оказывается, что при этих значениях (4.10) "полная" операторная алгебра вырожденных полей (4.9) содержит подалгебру

$$M(p/q) = \frac{1}{2}\bigoplus_{n=1}^{p-1}\bigoplus_{m=1}^{q-1}\left[\Phi_{(n,m)}\right], \quad (4.11)$$

состоящую из конечного числа конформных классов. Отметим, что в случае (4.10) спектр (4.7) имеет вид

$$\Delta_{(n,m)} = \frac{(qn-pm)^2-(q-p)^2}{4pq} ; \; 1 \le n \le p-1 \; ; \; 1 \le m \le q-1, \quad (4.12)$$

и удовлетворяет соотношению $\Delta_{(p-n,\,q-m)} = \Delta_{(n,m)}$, так что

$$\Phi_{(p-n,\,q-m)} = \Phi_{(n,m)} . \quad (4.13)$$

Хотя, ввиду (4.13) формально каждый конформный класс появляется в сумме (4.11) дважды, мы подразумеваем, что пространство

$\mathcal{M}(p/q)$ содержит $(p-1)(q-1)/2$ различных конформных классов; в этом смысле в (4.II) поставлен "множитель" I/2. Структура операторной алгебры (4.II) описывается той же формулой (4.9), где, однако,

$$l_1 = \min_{i=1,2}(n_i - 1,\ p - n_i - 1);$$
$$k_1 = \min_{i=1,2}(m_i - 1,\ q - m_i - 1). \qquad (4.14)$$

Операторная алгебра (4.II) называется "минимальной моделью" $\mathcal{M}(p/q)$.

Равенство (4.I3) означает, что каждое из входящих в (4.II) первичных полей "дважды вырождено", т.е. соответствующее пространство $V_{(n,m)}$ содержит два независимых нуль-вектора, на уровнях $L = nm$ и $L' = (p-n)(q-m)$. В частность, единичный оператор $I = \Phi_{(1,1)} = \Phi_{(p-1,q-1)}$ имеет, кроме уже упоминавшегося вырождения $L_{-1} I = 0$, дополнительное вырождение на уровне $(p-1)(q-1)$. Это означает, что некоторое поле спина $(p-1)(q-1)$, "составленное" из $T(z)$, в модели $\mathcal{M}(p/q)$ обращается в нуль. Например в модели $\mathcal{M}(2/5)$ $(c = -22/5)$, обращается в нуль поле (3.20) спина 4:

$$\mathcal{M}(2/5): \qquad T_4 = 0. \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.I5) полностью определяет все свойства модели $\mathcal{M}(2/5)$. Действительно, рассмотрим операторное разложение (3.22) с произвольным первичным полем $A = \Phi_\Delta$. Сингулярные члены этого разложения легко выводятся из (3.23)

$$T_4(z)\Phi_\Delta(0,0) = (\Delta + 1/5)\Big(\frac{\Delta}{z^4} + \frac{2}{z^3}L_{-1} + \frac{5}{2\Delta+1}\frac{1}{z^2}L_{-1}^2 + \qquad (4.16)$$
$$+ \frac{5}{(2\Delta+1)(\Delta+1)}\frac{1}{z}L_{-1}^3\Big)\Phi_\Delta + 2\Delta\Big(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{\Delta+1}\frac{1}{z}L_{-1}\Big)\Big(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}\Big)\Phi_\Delta +$$
$$+ \frac{2(\Delta-1)}{z}\Big(L_{-3} - \frac{2}{\Delta+1}L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}L_{-1}^3\Big)\Phi_\Delta + reg.$$

Поэтому равенство (4.I5) фиксирует спектр размерностей всех первичных полей модели $\mathcal{M}(2/5)$: $\Delta_{(1,1)} = \Delta_{(1,4)} = 0$; $\Delta_{(1,2)} = \Delta_{(1,3)} = -1/5$, а также показывает, что поле $\Phi_{(1,2)} = \Phi_{(1,3)}$ удовлетворяет (4.6), а также уравнению

$$\Big(L_{-3} - \frac{2}{\Delta+1}L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}L_{-1}^3\Big)\Phi_{(1,3)} = 0, \qquad (4.17)$$

где $\Delta = \Delta_{(1,3)}$, отвечающему вырождению на уровне 3. Отметим здесь: "физическое" содержание модели $\mathcal{M}(2/5)$ исследовал Карди [36], показавший, что эта модель описывает критическую сингулярность Ли и Янга, которая появляется, например, в модели Изинга с $T > T_c$ при определенном комплексном значении магнитного поля $i h(T)$.

До сих пор мы не обсуждали условия локальности полей и ассоциативности операторной алгебры "минимальных моделей". Напомним, что каждое первичное поле Φ_ℓ характеризуется двумя размерностями $(\Delta_\ell, \bar\Delta_\ell)$, причем для локального поля Φ_ℓ спин $S_\ell = \Delta_\ell - \bar\Delta_\ell$ должен удовлетворять условию $S_\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. В минимальных моделях $\mathcal{M}(p/q)$ всегда можно построить $(p-1)(q-1)/2$ бесспиновых первичных полей; в дальнейшем, если не оговорено противное, $\Phi_{(n,m)}$ обозначает именно бесспиновое поле с размерностями $(\Delta_{(n,m)}, \Delta_{(n,m)})$. В действительности, в моделях $\mathcal{M}(p/q)$ с $pq \in 2\mathbb{Z}$ можно построить локальные первичные поля с ненулевыми спинами. Мы не будем обсуждать здесь этот интересный вопрос; несколько примеров приведено ниже. Скажем, однако, несколько слов об ассоциативности операторной алгебры (4.II). Оказывается, что для всех $\mathcal{M}(p/q)$ можно добиться ассоциативности операторной алгебры (4.9), (4.I4) подходящим подбором структурных констант $\mathbb{C}_{(n_1m_1)(n_2m_2)(n_3m_3)}$ (см. (3.27)). Значения констант $\mathbb{C}$, обеспечивающие ассоциативность, можно вычислить, решая уравнения (4.8) или пользуясь представлением Фейгина-Фукса [33] для корреляционных функций, как это сделано в [38, 39]. Общее выражение для этих констант, найденное в [39], довольно громоздко; мы приведем лишь несколько частных случаев.

$$\mathbb{C}_{(1,2)(n,m)(n,m+1)} = \Big[\frac{\gamma(2-2\rho)}{\gamma(1-\rho)}\,\frac{\gamma(n-m\rho)}{\gamma(1+n-(1+m)\rho)}\Big]^{1/2}; \qquad (4.18а)$$

$$\mathbb{C}_{(1,3)(n,m)(n,m)} = \frac{\Gamma(2-2\rho)}{\Gamma(2\rho)}\Big[\frac{\gamma^3(\rho)}{\gamma(3\rho-1)}\Big]^{1/2}\frac{\gamma(n+(1-m)\rho)}{\gamma(1+n-(1+m)\rho)}; \qquad (4.18б)$$

$$\mathbb{C}_{(1,3)(n,m)(n,m+2)} = \frac{2\rho-1}{(m+1)\rho-n}\Big[\frac{\gamma(2-3\rho)}{\gamma(1-\rho)}\,\frac{\gamma(n-m\rho)}{\gamma(1+n-(1+m)\rho)}\Big]^{1/2}, \qquad (4.18в)$$

где ρ дается (4.I0), а $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$.

Как уже говорилось во введении, условие унитарности накдают представления алгебры Рамона [21]. В [15, 21] показано, что модель $\mathcal{M}_4$ описывает трикритическое поведение статистических систем с Изинговской симметрией, причем размерности полей σ и σ' описывают показатели магнитной восприимчивости, а размерности Φ и $\widetilde{\Phi}$ – "термические" показатели в трикритической точке.

На рис. 3 показана "таблица полей" модели $\mathcal{M}_5$. Здесь возможны бозонные поля $W(z)$ и $\overline{W}(\bar z)$ с размерностями (3,0) и (0,3). Эти поля также представляют некую "высшую" симметрию ("W-алгебру", §6) в модели $\mathcal{M}_5$. В [14] показано, что $\mathcal{M}_5$ описывает критическую точку трехпозиционной модели Поттса, причем поля $\sigma = \Phi_{(4/5,4/5)}$ и $\varepsilon = \Phi_{(4/5,2/5)}$ соответствуют параметру порядка и плотности энергии. Структура операторной алгебры $\mathcal{M}_5$ будет более понятна в свете "высших" симметрий этой модели, обсуждающихся в § 6. Укажем еще, что модель $\mathcal{M}_6$ описывает трикритическое поведение трехпозиционной модели Поттса [15].

Отметим, что "высшие" симметрии – общее свойство моделей $\mathcal{M}_p$. Действительно, поле $\Phi_{(p-1,1)} = \Phi_{(1,p)}$ имеет размерность $s_p = (p-1)(p-2)/4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, поэтому можно построить локальные "токи" $\Psi_p(z)$ и $\overline{\Psi}_p(\bar z)$ с размерностями $(s_p, 0)$ и $(0, s_p)$. Соответствующие алгебры для $p \geq 6$ пока еще не изучены.

Наконец укажем, что модели $\mathcal{M}_p$, $p = 4, 5, 6, \ldots$ описывают мультикритические точки статистических систем со скалярным параметром порядка φ и Изинговской симметрией $\varphi \to -\varphi$. В лагранжевой теории поля такие "$p-1$ – критические" точки описываются эффективным действием вида*.

$$\mathcal{H}_p = \int \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + g\, \varphi^{2p-2} \right] d^2x . \qquad (4.20)$$

При этом поле $\varphi = \Phi_{(2,2)}$ модели $\mathcal{M}_p$ отождествляется с "фундаментальным" полем φ в (4.20); остальные поля $\Phi_{(n,m)}$

---

*Во избежание недоразумений подчеркнем, что теория поля (4.20) имеет конформно-инвариантное решение только при специальном (зависящем от регуляризации) подборе константы связи $g = g_*$ и контрчленов φ^{2n}, $n = 1, 2, \ldots, p-2$. Конечно, в пертурбативной области $g \ll \mu_0^{-2}$ теория (4.20) не имеет конформных решений.

в $\mathcal{M}_p$ соответствуют (подходящим образом регуляризованным [43]) составным полям. Например, $\Phi_{(n,n)} = :\varphi^{n-1}:$, $1 \leq n \leq p-1$; $\Phi_{(n+1,n)} = :\varphi^{p-4+n}:$, $1 \leq n \leq p-2$ [43].

§5. СУПЕРКОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Суперконформная симметрия в двумерной теории поля [19-21] генерируется "правым" и "левым" супертоками $S(z)$ и $\overline{S}(\bar z)$ – фермионными полями с размерностями (3/2, 0) и (0, 3/2) соответственно. Алгебра генераторов определяется, аналогично (3.9), сингулярными членами операторных разложений

$$S(z_1)S(z_2) = \frac{2c}{3(z_1-z_2)^3} + \frac{2}{z_1-z_2} T(z_2) + reg, \qquad (5.1)$$

и такого же разложения для $\overline{S}$. Поле S ($\overline{S}$) является первичным конформным полем и удовлетворяет (3.11). Операторные разложения (5.1) и (3.11) имеют очевидную симметрию $T \to T$, $S \to -S$, поэтому в суперконформной теории могут существовать поля двух типов: поля Невье-Шварца A_{NS}, локальные относительно S и $\overline{S}$, и поля Рамона A_R, 1/2 – локальные (см. §4) относительно этих токов. Мы обозначим $\mathcal{A}_{NS}$ ($\mathcal{A}_R$) подпространство полей Невье-Шварца (Рамона) в $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{NS} \oplus \mathcal{A}_R$. Операторные разложения

$$S(z_1)A_*(z_2,\bar z_2) = \sum_k (z_1-z_2)^{-k-3/2} S_k A_*(z_2,\bar z_2) \qquad (5.2)$$

служат определением операторов S_k, причем $k \in \mathbb{Z} + 1/2$, если $* = NS$, и $k \in \mathbb{Z}$, если $* = R$. Очевидно, подпространства $\mathcal{A}_{NS}$ и $\mathcal{A}_R$ инвариантны относительно действия операторов S_k. Эти операторы, вместе с L_n (3.5), образуют алгебру Невье-Шварца-Рамона NSR с (анти) перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned} [L_n, S_k] &= \tfrac{1}{2}(n-2k) S_{n+k} ; \\ \{S_k, S_\ell\} &= 2L_{\ell+k} + \tfrac{c}{3}(k^2 - \tfrac{1}{4})\delta_{k+\ell,0} , \end{aligned} \qquad (5.3)$$

которые легко выводятся из (5.1) и (3.11). Аналогично определяются операторы $\overline{S}_k$, удовлетворяющие таким же соотношениям (5.3), и антиперестановочные с S_k. Таким образом, полная симметрия суперконформной теории есть $NSR \times \overline{NSR}$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в §3, показывают, что пространства $\mathcal{A}_{NS}$ и $\mathcal{A}_R$ разлагаются на "суперконформные классы": $\mathcal{A}_{NS} = \oplus_\ell [\Phi_\ell]_{NS}$, $\mathcal{A}_R = \oplus_\lambda [\Phi_\lambda]_R$, где "первичные суперконформные" (которые далее в этом параграфе называются просто "первичными") поля Φ_ℓ, Φ_λ удовлетворяют (3.10) и

$$S_k \Phi = \overline{S}_k \Phi = 0 \quad \text{для} \quad k > 0, \tag{5.4}$$

а пространства $[\Phi_\ell]_{NS}$ и $[\Phi_\lambda]_R$ строятся аналогично (3.13) с помощью операторов L_n, $\overline{L}_n$, S_k, $\overline{S}_k$ с $n, k \leq 0$, и реализуют неприводимые представления $NSR \times \overline{NSR}$.

Как и конформные классы в § 3, суперконформные классы полностью характеризуются размерностями (Δ , $\overline{\Delta}$) своих первичных полей.

Необходимо отметить, что операторы

$$\delta_\varepsilon = \oint \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) T(z) \; ; \; \delta_\omega = \oint \frac{dz}{2\pi i} \omega(z) S(z) \tag{5.5}$$

можно интерпретировать как генераторы бесконечномалых преобразований координат (Z ; $\overline{Z}$) = (z, θ ; $\overline{z}, \overline{\theta}$) 2 + 2 - мерного суперпространства

$$z \to z + \varepsilon(z) - \omega(z)\theta \; ; \; \theta \to \theta + \tfrac{1}{2}\varepsilon'(z) + \omega(z), \tag{5.6}$$

где $\theta, \overline{\theta}$ - нечетные координаты, а ε (ω) - четная (нечетная) бесконечномалая аналитическая функция. Характерное свойство (5.6) - конформное преобразование I-формы $dz + \theta d\theta$.

Поля $S(z)$ и $T(z)$ можно рассматривать как компонент "супертензора напряжений":

$$S(z, \theta) = S(z) + 2\theta T(z), \tag{5.7}$$

а каждое первичное поле Невье-Шварца Φ_ℓ является компонентой суперполя

$$\Phi_\ell(Z, \overline{Z}) = \Phi_\ell(z,\overline{z}) + \theta \Psi_\ell(z,\overline{z}) + \overline{\theta}\,\overline{\Psi}_\ell(z,\overline{z}) + i\theta\overline{\theta}\,\widetilde{\Phi}_\ell(z,\overline{z}), \tag{5.8}$$

где $\Psi_\ell = S_{-1/2}\Phi_\ell$, $\overline{\Psi}_\ell = \overline{S}_{-1/2}\Phi_\ell$, $\widetilde{\Phi}_\ell = -i S_{-1/2}\overline{S}_{-1/2}\Phi_\ell$.

Суперполе (5.8) удовлетворяет уравнениям

$$S_{1/2}\Phi_\ell = -2\Delta_\ell \theta \Phi_\ell \; ; \; L_0\Phi_\ell = (\Delta_\ell + \tfrac{1}{2}\theta \tfrac{\partial}{\partial\theta})\Phi_\ell \; ; \tag{5.9}$$
$$S_{-1/2}\Phi_\ell = (\tfrac{\partial}{\partial\theta} - \theta\tfrac{\partial}{\partial z})\Phi_\ell,$$

где Δ_ℓ - "правая" размерность поля Φ_ℓ.

Поскольку поле $S_k A_R$ не может быть локально относительно A_R, пространство $\mathcal{A}_R$ естественно распадается на два класса локальности $\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_R^{(+)} \oplus \mathcal{A}_R^{(-)}$, причем внутри каждого класса поля взаимно-локальны, а любое поле $A_R^{(+)}$ I/2 - локально относительно $A_R^{(-)}$. Операторы S_k действуют в $\mathcal{A}_R$ так: $S_k \mathcal{A}_R^{(\epsilon)} \to \mathcal{A}_R^{(-\epsilon)}$; $\epsilon = \pm$. В частности, первичные поля Рамона представляют собой в действительности "дублеты" полей $\Phi_\lambda^{(\epsilon)} \in \mathcal{A}_R^{(\epsilon)}$, а операторы S_0 и $\overline{S}_0$ действуют на них как матрицы 2 х 2. Например, для бесспиновых полей Φ_λ с размерностями $(\Delta_\lambda, \overline{\Delta}_\lambda)$

$$S_0\Phi_\lambda^{(\epsilon)} = 2^{-1/2}(1+\epsilon i)\beta_\lambda \Phi_\lambda^{(-\epsilon)} \; ; \; \overline{S}_0\Phi_\lambda^{(\epsilon)} = 2^{-1/2}(1-\epsilon i)\beta_\lambda \Phi_\lambda^{(-\epsilon)}, \tag{5.10}$$

где параметр β_λ связан с Δ_λ соотношением $\Delta_\lambda - \hat{c}/16 = 1/4\, \beta_\lambda^2$; здесь и ниже используется обозначение $\hat{c} = 2c/3$. Исключение может представлять поле Рамона $\Phi_{(0)}$ с размерностью $\Delta_{(0)} = \hat{c}/16$ (Рамоновский вакуум), если оно имеется в теории. Для него $S_0\Phi_{(0)} = \overline{S}_0\Phi_{(0)} = 0$ и вторая компонента не обязана существовать (для определенности можно считать, что $\Phi_{(0)} \in \mathcal{A}_R^{(+)}$).

Вырожденные неприводимые представления алгебры NSR определяются точно так же, как для алгебры Вирасоро (см. §4). Все случаи вырождения перечисляются в этом случае следующей, очень похожей на (4.7), формулой

$$\Delta_{(n,m)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(n\beta_+ + m\beta_-)^2 + \frac{1}{32}(1-(-1)^{n+m}), \tag{5.11}$$

где $\Delta_0 = (\hat{c}-1)/16$, а

$$\beta_\pm = \frac{1}{4}(\sqrt{1-\hat{c}} \pm \sqrt{9-\hat{c}}) \; ; \; \beta_+\beta_- = -1/2. \tag{5.12}$$

Здесь n, m – натуральные числа, причем (5.II) относится к представлениям Невье-Шварца (Рамона), если $n+m \in 2\mathbb{Z}$ $(n+m \in 2\mathbb{Z}+1)$. Формула (5.II) (как и (4.7)) была открыта Кацем [32]. Вырожденные первичные поля $\Phi_{(n,m)}$ ($\Phi_{(n,m)} \in \mathcal{A}_{NS}$, если $n+m \in 2\mathbb{Z}$; $\Phi_{(n,m)} \in \mathcal{A}_R$, если $n+m \in 2\mathbb{Z}+1$) в суперконформной теории обладают такими же основными свойствами, как и вырожденные конформные поля в § 4 [I9-2I]. Именно, корреляционные функции, содержащие вырожденные суперконформные поля удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям (примеры которых можно найти в [I9, 2I, 44]), а вырожденные суперконформные классы образуют замкнутую операторную алгебру с такой-же структурой (4.9).

Подбирая параметр C так, чтобы величина $\rho = -\beta_- / \beta_+$ принимала рациональные значения, можно получить замкнутые операторные алгебры, содержащие конечный набор суперконформных классов вида (4.II) – "минимальные суперконформные модели" [I9-2I]. Особый интерес представляет "унитарная серия" [2I] минимальных моделей $S\mathcal{M}_p$; $p = 3, 4, 5, \ldots$, отвечающая выбору

$$\rho = \frac{p}{p+2} \; ; \qquad (5.13)$$

при этом C принимает значение (I.I2). Пространство полей $\mathcal{A}$ модели $S\mathcal{M}_p$ содержит $[p^2/2]$ ($[\ ]$ – целая часть) первичных полей $\Phi_{(n,m)}$; $n = 1, 2, \ldots, p-1$; $m = 1, 2, \ldots, p+1$, причем $\Phi_{(p-n,\, p+2-m)} = \Phi_{(n,m)}$, с размерностями

$$\Delta_{(n,m)} = \frac{((p+2)n - pm)^2 - 4}{8p(p+2)} + \frac{1}{32}(1-(-)^{n+m}). \qquad (5.14)$$

Значения структурных констант (в формуле, аналогичной (3.27)), обеспечивающие ассоциативность операторной алгебры $S\mathcal{M}_p$, вычислены в [44]. Отметим, что операторные алгебры $S\mathcal{M}_p$ имеют различную симметрию в зависимости от четности числа p. Так, при $p \in 2\mathbb{Z}+1$ пространства $\mathcal{A}_R^{(+)}$ и $\mathcal{A}_R^{(-)}$ изоморфны друг другу, и модель $S\mathcal{M}_p$ симметрична относительно "преобразования дуальности" (сходного с симметрией Краммерса-Ванье- модели Изинга [40]) : $\mathcal{A}_R^{(+)} \leftrightarrow \mathcal{A}_R^{(-)}$. При $p \in 2\mathbb{Z}$ модель $S\mathcal{M}_p$ содержит "Рамоновский вакуум" $\Phi_{(p/2,\, p/2+1)} \in \mathcal{A}_R$ [2I]

и не имеет этой симметрии. В то же время модель $S\mathcal{M}_p$ с четными p обладает $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ симметрией следующего вида:

$$\Phi_{(n,m)} \to (\epsilon_1)^{n+1} (\epsilon_2)^{m+1} \Phi_{(n,m)} \; ; \quad \epsilon_1, \epsilon_2 -$$

произвольные знаки: $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$.

Легко проверить, что $S\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_4$ (§4); эта модель описывает трикритическую точку модели Изинга. Модель $S\mathcal{M}_3$ $(c=1)$ соответствует специальной точке гауссовой модели (см. введение). Отметим, что $S\mathcal{M}_4$ обладает, в действительности, $N = 2$ расширенной суперсимметрией*) [2I] (другие модели $S\mathcal{M}_p$ с $p \in 2\mathbb{Z}$ также имеют "высшие симметрии). Вопрос о "физической" интерпретации неподвижных точек $S\mathcal{M}_p$ с $p > 4$ остается, в основном, открытым (см., однако, [46]). Связь моделей $S\mathcal{M}_p$ с лагранжевой теорией поля рассматривается в [43].

§6. "ПАРАФЕРМИОННЫЕ" И ДРУГИЕ СИММЕТРИИ

В § 3 конформная теория поля формулировалась как замкнутая ассоциативная операторная алгебра $\mathcal{A}$, где пространство $\mathcal{A}$ содержит взаимно-локальные поля. В действительности, часто полезно расширить это пространство, вводя специальные нелокальные поля (фактически, это уже делалось в § 5 при рассмотрении суперконформной теории поля). Мы будем говорить, что поле $A(x)$ γ-локально относительно поля $B(x)$, если произведение $A(x_1)B(x_2)$ преобретает фазовый множитель $exp(2\pi i \gamma)$ при продолжении, скажем, по переменной x_1 вдоль замкнутого контура, окружающего (против часовой стрелки, рис. 4) точку x_2. Соотношения операторной алгебры (I.5) без существенных изменений переносятся на такие поля; основное отличие состоит в том, что коэффициенты $C_{ij}^k(x)$ не являются теперь однозначными функциями $x \in \mathbb{R}^2$.

Рис. 4

γ- локальные поля, естественно, возникают в статистических системах с симметрией $\mathbb{Z}_N$ [27]. В таких системах (в не-

*) Модели конформной теории поля с $N = 2$ расширенной суперсимметрией исследованы, например в [28], где имеются ссылки на более ранние работы.

прерывном пределе) имеется $N-1$ компонент "параметра порядка" σ_k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, соответствующих $N-1$ представлениям Z_N:

$$\Omega \sigma_k = \omega^k \sigma_k, \tag{6.1}$$

где Ω – образующая группы Z_N: $\Omega^N = E$, а $\omega = \exp(2\pi i/N)$. Кроме того, имеется $N-1$ – компонентное поле μ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, N-1$, – "параметр беспорядка" [27]; поля μ_ℓ взаимно-локальны, однако μ_ℓ $(k\ell/N)$-локально относительно σ_k. На поля μ_ℓ действует "дуальная" группа $\tilde{Z}_N$:

$$\tilde{\Omega} \mu_\ell = \omega^\ell \mu_\ell, \tag{6.2}$$

где $\tilde{\Omega}$ – образующая $\tilde{Z}_N$. Таким образом, в Z_N – симметричной теории поля существует, в действительности, группа $Z_N \times \tilde{Z}_N$. Мы будем говорить, что поле $A_{(k,\ell)}$ имеет $Z_N \times \tilde{Z}_N$ заряд (k,ℓ), если $\Omega A_{(k,\ell)} = \omega^k A_{(k,\ell)}$, $\tilde{\Omega} A_{(k,\ell)} = \omega^\ell A_{(k,\ell)}$; очевидно, числа k и ℓ определены по модулю N. Поля σ_k и μ_ℓ имеют заряды $(k, 0)$ и $(0, \ell)$ соответственно. Нетрудно показать, что поле $A_{(k,\ell)}$ γ-локально относительно $A_{(k',\ell')}$ с $\gamma = (k\ell' + k'\ell)/N$. "Сливая" всевозможными способами поля σ_k и μ_ℓ, можно построить пространство γ-локальных полей

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \bigoplus_{\ell=0}^{N-1} \mathcal{A}_{(k,\ell)}, \tag{6.3}$$

образующих замкнутую алгебру относительно операторных разложений, причем

$$A_{(k,\ell)} A_{(k',\ell')} \in \mathcal{A}_{(k+k',\ell+\ell')}. \tag{6.4}$$

В [28] для каждого $N = 2, 3, 4, \ldots$ построена $Z_N \times \tilde{Z}_N$ – инвариантная модель конформной теории поля, характеризуемая наличием специальной "парафермионной симметрии". Именно, предполагается, что пространство (6.3) содержит поля $\Psi_k \in \mathcal{A}_{(k,k)}$ и $\bar{\Psi}_k \in \mathcal{A}_{(k,-k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ (причем $\Psi_k^+ = \Psi_{N-k}$, $\bar{\Psi}_k^+ = \bar{\Psi}_{N-k}$), удовлетворяющие уравнениям

$$\partial_{\bar{z}} \Psi_k = \partial_z \bar{\Psi}_k = 0,$$

т.е. $\Psi_k = \Psi_k(z)$, $\bar{\Psi}_k = \bar{\Psi}_k(\bar{z})$. Поля Ψ_k и $\bar{\Psi}_k$ имеют размерности $(\Delta_k, 0)$ и $(0, \Delta_k)$ соответственно, где

$$\Delta_k = \frac{k(N-k)}{N} \tag{6.5}$$

(спины нелокальных полей могут быть дробными). Поля $\Psi_k(z)$ – "парафермионные токи" – порождают замкнутую алгебру, определяемую операторными разложениями

$$\Psi_{k_1}(z_1)\Psi_{k_2}(z_2) = C_{k_1,k_2}(z_{12})^{-\frac{2k_1k_2}{N}}\left[\Psi_{k_1+k_2}(z_2)+\ldots\right]; k_1+k_2 \neq 0 \tag{6.6a}$$

$$\Psi_k(z_1)\Psi_k^+(z_2) = (z_{12})^{-2\Delta_k}\left[I + \frac{2\Delta_k}{c}(z_{12})^2 T(z_2)+\ldots\right], \tag{6.6б}$$

где $T(z)$ – "правая" компонента тензора энергии-импульса, порождающая алгебру Вирасоро (I.9) с центральным зарядом С, а C_{k_1,k_2} – некоторые числовые коэффициенты. Можно показать [28], что требование ассоциативности операторной алгебры (6.6) полностью фиксирует параметры C_{k_1,k_2}:

$$C_{k_1,k_2} = \frac{(k_1+k_2)!\,(N-k_1)!\,(N-k_2)!}{(N-k_1-k_2)!\,k_1!\,k_2!} \tag{6.7}$$

и значение центрального заряда $C = C_N$, где

$$C_N = \frac{2(N-1)}{N+2}. \tag{6.8}$$

Поля, составляющие пространство (6.4) такой модели можно классифицировать по представлениям "алгебры парафермионных токов" (6.6) (и такой же алгебры, порождаемой $\bar{\Psi}_k(\bar{z})$). Опуская подробности (которые можно найти в [28]), укажем, что алгебра (6.6) однозначно фиксирует строение пространства (6.4) (это явление сходно с тем, как уравнения типа (4.15) фиксируют строение пространств $\mathcal{M}(P/q)$). Именно, пространство (6.3) распадается на N "парафермионных классов"*),

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} [\sigma_k]_\Psi, \tag{6.9}$$

где $\sigma_k \in \mathcal{A}_{(k,0)}$ – бесспиновые "первичные" поля с размерностями (d_k, d_k),

---

*) С математической точки зрения представления "алгебра парафермионных токов" (6.6) тесно связаны с представлениями $\hat{SU}(2)$ алгебры Каца-Муди [28].

$$d_k = \frac{k(N-k)}{N(N+2)}, \qquad (6.10)$$

а подпространство $[\sigma_k]_\psi$ содержит все поля, получаемые "слияниями" любых токов $\psi_\ell, \bar{\psi}_\ell$ с σ_k. Поля σ_k, имеющие $Z_N \times \tilde{Z}_N$ заряды $(k, 0)$, отождествляются с компонентами "параметра порядка". Каждое из подпространств $[\sigma_k]_\psi$ содержит, в частности, серию полей $\Psi_k^{(m)} \in A_{(k-m,-m)}$ с размерностями $(d_k^{(m)}, d_k)$, где

$$d_k^{(m)} = d_k + \frac{m(k-m)}{N}. \qquad (6.11)$$

Как видно из этой формулы, поле $\mu_k^+ = \mu_{N-k} = \Psi_k^{(k)} \in A_{(0,N-k)}$ имеет нулевой спин и те же размерности (d_k, d_k), что и σ_k. Поля μ_k, $k = 1, 2, \dots, N-1$ – компоненты "параметра беспорядка". В [28] показано, что пространство (6.9) образует ассоциативную операторную алгебру и вычислены соответствующие структурные константы и некоторые корреляционные функции. Следовательно, для каждого $N = 2, 3, 4, \dots$ пространство (6.9) представляет собой конформную теорию поля, которую мы обозначаем Z_N. Операторная алгебра обладает $Z_N \times \tilde{Z}_N$ – симметрией и "самодуальностью", т.е. инвариантностью относительно замены $\sigma_k \leftrightarrow \mu_k$. Можно показать, что все модели Z_N унитарны [28].

Можно проверить, что модель Z_2 совпадает с $\mathcal{M}_3$, а $Z_3 = \mathcal{M}_5$. Эти модели описывают критические точки модели Изинга и трехпозиционной модели Поттса соответственно. Модель Z_4 $(c=1)$ – частный случай гауссовой теории поля, а модель Z_6 обладает суперконформной симметрией (генерируемой супертоками $S = \psi_3$ и $\bar{S} = \bar{\psi}_3$; $\Delta_S = 3/2$) и совпадает с моделью $S\mathcal{M}_6$ (см. § 5).

Модели Z_N с $N \geq 5$ описывают "критические точки бифуркации" Z_N – моделей Изинга. Чтобы пояснить, о чем идет речь, рассмотрим систему "спинов" $\sigma_{\vec{r}}$, помещенных в узлы $\vec{r}$ двумерной прямоугольной решетки. "Спины" $\sigma_{\vec{r}}$ принимают значения в группе Z_N, т.е. $\sigma_{\vec{r}} = \omega^{n(\vec{r})}$; $n(\vec{r}) = 0, 1, 2, \dots, N-1$. "$Z_N$ – модель Изинга" соответствует выбору функции распределения в виде

$$P\{\sigma_{\vec{r}}\} = \exp\Big\{-\sum_{\vec{r}, \alpha=1,2} H(\sigma_{\vec{r}}, \sigma_{\vec{r}+\vec{e}_\alpha})\Big\} = \prod_{\vec{r},\alpha} W(\sigma_{\vec{r}}, \sigma_{\vec{r}+\vec{e}_\alpha}) \qquad (6.12)$$

($\vec{e}_\alpha$ – базисные векторы решетки), т.е. гамильтониан H учитывает только взаимодействие ближайших соседей. Функция $W(\sigma, \sigma')$ представляется в виде

$$W(\sigma, \sigma') = \sum_{k=0}^{N-1} w_k (\sigma^* \sigma')^k \qquad (6.13)$$

с положительными коэффициентами $w_k = w_{N-k}$, т.е. функция распределения (6.12) зависит от $[N/2]$ параметров w_k, $k = 1, 2, \dots \leq N/2$ $(w_0 = 1)$. В зависимости от значений этих параметров, система может находиться в трех фазовых состояниях*): I) $\langle\sigma\rangle \neq 0, \langle\mu\rangle = 0$. II) $\langle\sigma\rangle = 0, \langle\mu\rangle \neq 0$. III) $\langle\sigma\rangle = \langle\mu\rangle = 0$ (см. рис. 5, где показана фазовая диаграмма Z_5 – модели). Все три фазы соприкасаются в "точках бифуркации" (b и b^* на рис. 5), являющимися критическими и описываются моделями Z_N [28].

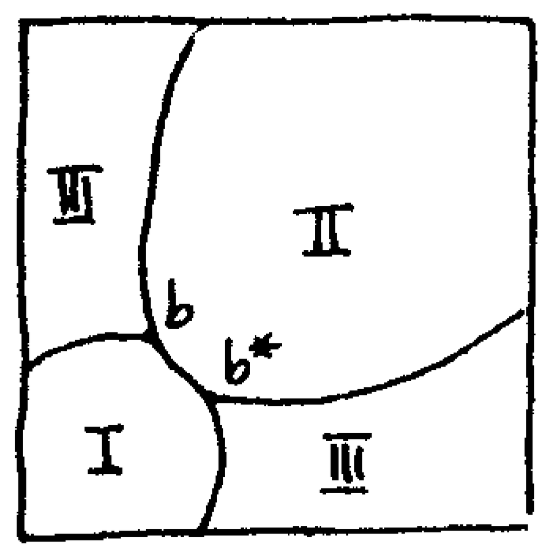

Рис. 5

Алгебра (6.6) полей ψ_k со спинами (6.5) является простейшим вариантом "алгебры парафермионных токов", ассоциированной с группой Z_N. В [29] исследован более сложный вариант: алгебра "парафермионных токов" $\psi(z)$, $\psi^+(z)$ спина 4/3. Эта алгебра определяется операторными разложениями, подобными (6.6), однако в этом случае условие ассоциативности алгебры не фиксирует полностью все параметры теории и возможно много конформных теорий поля с этой симметрией. В [29] построены соответствующие "унитарные минимальные модели" $S_3\mathcal{M}_p$, $p = 3, 4, 5, \dots$. Эти модели обладают $Z_3 \times \tilde{Z}_3$ симметрией и "самодуальностью" и отвечают значениям

$$c_p = 2\Big(1 - \frac{12}{p(p+4)}\Big) \qquad (6.14)$$

*) Здесь мы несколько упрощаем ситуацию. Если N не является простым числом, фазовая диаграмма Z_N – модели Изинга более сложна.

центрального заряда алгебры Вирасоро. Спектр размерностей "первичных" (в смысле этой алгебры "парафермионных токов") полей в модели $S_3\mathcal{M}_p$ имеет следующий (очень похожий на (4.I2) и (5.I4)) вид

$$\Delta_{(n,m)} = \frac{((p+4)n-pm)^2-16}{16p(p+4)} + \frac{1}{12}\left(1-\cos^4\left(\frac{\pi(n-m)}{4}\right)\right); \qquad (6.15)$$

$n=1,2,\ldots,p-1$; $m=1,2,\ldots,p+3$. Простейшая из этих моделей $S_3\mathcal{M}_3$ совпадает с $\mathcal{M}_6$ и описывает трикритическую точку трехпозиционной модели Поттса [I5]. Кроме того, $S_3\mathcal{M}_4 = Z_6 = S\mathcal{M}_6$. "Физический смысл" остальных неподвижных точек $S_3\mathcal{M}_p$ предстоит еще понять.

Можно предполагать, что унитарные серии $\mathcal{M}_p$, $S\mathcal{M}_p$ и $S_3\mathcal{M}_p$ являются представителями "семейства серий" $\mathcal{M}_p^{(q)}$, нумеруемых числом $q=1,2,3,\ldots$ и соответствующих значениям

$$C_p^{(q)} = \frac{3q}{q+2}\left(1-\frac{2(q+2)}{p(p+q)}\right); \; p=3,4,5,\ldots \qquad (6.16)$$

центрального заряда в (I.9), так что $\mathcal{M}_p \equiv \mathcal{M}_p^{(1)}$, $S\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p^{(2)}$, $S_3\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p^{(4)}$. В действительности, конструкция Годдара, Кента и Олива [47] (в обсуждение которой мы не будем здесь вдаваться) позволяет построить некие "заготовки" для пространств полей моделей $\mathcal{M}_p^{(q)}$. Однако соответствующие ассоциативные операторные алгебры пока не построены; кроме того, остается открытым вопрос о симметриях моделей $\mathcal{M}_p^{(q)}$.

Наконец упомянем еще одну разновидность "высших" симметрий конформной теории поля – " W – алгебры" [26, 48]. Эти симметрии генерируются локальными токами с высшими спинами $s \geq 3$. Простейший вариант " W – алгебры", порождаемой токами $T(z)$ и $W(z)$, где T – "правая" компонента тензора энергии-импульса, имеющая спин 2, а W – дополнительный ток с размерностями (3, 0), рассмотрен в [26]. Эта алгебра определяется сингулярными членами операторных разложений (3.9) и

$$T(z_1)W(z_2) = \frac{3}{(z_{12})^2}W(z_2) + \frac{1}{z_{12}}W'(z_2) + reg; \qquad (6.17а)$$

$$W(z_1)W(z_2) = \frac{c}{3z_{12}^6} + \frac{2}{z_{12}^4}T(z_2) + \frac{1}{z_{12}^3}T'(z_2) + \frac{3}{10}\frac{1}{z_{12}^2}T''(z_2) + \frac{1}{15}\frac{1}{z_{12}}T'''(z_2) + \frac{2b}{z_{12}^2}T_4(z_2) + \frac{b}{z_{12}}T_4'(z_2) + reg, \qquad (6.17б)$$

где $b = 16/(22+5c)$, штрих обозначает производную, а поле $T_4(z)$ определено в § 3, (3.20). Вводя, аналогично (3.5), (3.22), (5.2), операторы W_n ; $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, можно превратить (6.I7) в коммутационные соотношения

$$[L_n, W_m] = (2n-m)W_{n+m}; \qquad (6.18а)$$

$$[W_n, W_m] = (n-m)\left[\tfrac{1}{15}(n+m+2)(n+m+3) - \tfrac{1}{6}(n+1)(m+2)\right]L_{n+m} + b(n-m)\Lambda_{n+m} + \frac{c}{3\cdot5!}(n^2-4)(n^2-1)n\,\delta_{n+m,0}, \qquad (6.18б)$$

где Λ_n – операторы (3.23). Следует подчеркнуть, что операторы L_n и W_m не являются образующими какой-либо алгебры Λ_n, т.к. (6.I8б) содержит операторы Λ_n. Скорее, (6.I8) следует рассматривать как пример ассоциативной алгебры с квадратичными определяющими соотношениями. Сходный класс алгебр ("алгебры Янга-Бакстера") играет центральную роль в квантовом методе обратной задачи (см., например, [49]). Геометрический смысл "симметрий", подобных (6.I8) (вопрос, кажущийся мне принципиально важным), еще предстоит понять.

Как уже отмечалось в § 4, пространство полей модели $\mathcal{M}_5$ представляет " W –алгебру" (6.I8). Например, сумма конформных классов $[\Phi_{4/5}] \oplus [\Phi_{7/5}]$ (см. рис. 3) является неприводимым представлением (6.I8). В действительности, модель $\mathcal{M}_5$ – первый представитель ($p=4$) серии унитарных "минимальных моделей" $W_3\mathcal{M}_p$, $p=4,5,6,\ldots$ соответствующих значениям

$$C_p = 2\left(1-\frac{12}{p(p+1)}\right)$$

параметра C в (I.9), (6.I8). Эти модели построены в [48].

§7. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И РГ В ОКРЕСТНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Если решение конформной теории поля $\mathcal{A}_{g_*}$, соответствующее некоторой неподвижной точке $g_* \in \mathcal{S}$ (см. §2), известно, можно попытаться исследовать поведение РГ в некоторой окрестности этой точки.

Пусть $\{g^a\}$ – некоторая система координат в S, такая, что начало координат совмещено с неподвижной точкой g_*, т.е. $g^a_* = 0$. Тогда $\beta^a(0)=0$, где $\beta^a(g)$ – коэффициенты в (2.II). Предположим, что функции $\beta^a(g)$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням g^a. Разумеется, линейная часть этого разложения вполне определяется спектром аномальных размерностей бесспиновых полей в конформной теории поля $g=0$. Обозначим $\Phi^0_a = \Phi_a|_{g=0}$, $\Phi^0_a \in \mathcal{A}^{(0)}_{g=0}$, где поля Φ_a определены как производные (2.9). Систему координат $\{g^a\}$ удобно выбрать таким образом, чтобы поля Φ^0_a обладали определенными размерностями (Δ_a, Δ_a) и были ортонормированы относительно метрики (2.I7), т.е. $G_{ab}(0) = \delta_{ab}$. При этом оператор $\gamma(0)$ (2.I3) приобретает диагональный вид $\gamma_a^b(0) = \Delta_a \delta_{ab}$, и из (2.I4) получается известное выражение

$$\beta^a(g) = \epsilon_a g^a + O(g^2), \tag{7.I}$$

где $\epsilon_a = 1-\Delta_a$. Дальнейшие члены разложения (7.I) можно, в принципе, вычислять по теории возмущений. Конечно, в общем случае несколько первых членов этого разложения не позволяют судить о глобальных топологических свойствах РГ. Рассмотрим, однако, случай, когда размерности Δ_a полей Φ^0_a близки к I, т.е. $\epsilon_a \sim \epsilon \ll 1$. При этом можно ожидать, что нелинейные члены в (7.I) становятся сравнимыми с линейной частью при $g^a \sim \epsilon$. Таким образом, РГ обладает в этом случае нетривиальным поведением (например, может иметь другие неподвижные точки) в области $g^a \lesssim \epsilon$, где применима теория возмущений; характеристики РГ в этой области можно вычислять в виде ряда по степеням малого параметра ϵ. Сказанное в точности соответствует основной идее ϵ - разложения [2].

Вычислим следующий член разложения (7.I), в случае $\epsilon_a \sim \epsilon \ll 1$, предполагая, что Φ^0_a – первичные конформные поля. Согласно (2.I0), имеем

$$\frac{\partial}{\partial g^a}\langle \Phi_b(x)\Phi_c(0)\rangle\Big|_{g=0} = \langle (B^0_a\Phi^0_b)(x)\Phi^0_c(0)\rangle + \\ + \langle \Phi^0_b(x)(B^0_a\Phi^0_c)(0)\rangle + \int d^2y \langle \Phi^0_a(y)\Phi^0_b(x)\Phi^0_c(0)\rangle, \tag{7.2}$$

где $B^0_a = B_a|_{g=0}$. Трехточечные функции в правой части (7.2) выражаются через структурные константы C_{abc} операторных разложений (3.27):

$$\langle \Phi^0_{a_1}(x_1)\Phi^0_{a_2}(x_2)\Phi^0_{a_3}(x_3)\rangle = C_{a_1a_2a_3}|x_{12}|^{2\delta_{12}}|x_{13}|^{2\delta_{13}}|x_{23}|^{2\delta_{23}}, \tag{7.3}$$

где $x_{12} = x_1 - x_2$, $\delta_{12} = \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2$, и т.д. Интеграл в (7.2), конечно, берется явно; он равен $C_{abc} I^a_{bc} (x^2)^{1-\Delta_a-\Delta_b-\Delta_c}$, где

$$I^a_{bc} = 2\pi \frac{\Gamma(1+\Delta_b-\Delta_c-\Delta_a)\Gamma(1+\Delta_c-\Delta_b-\Delta_a)\Gamma(2\Delta_a-1)}{\Gamma(\Delta_a+\Delta_c-\Delta_b)\Gamma(\Delta_a+\Delta_b-\Delta_c)\Gamma(2-2\Delta_a)}, \tag{7.4}$$

причем подразумевается, что возможные расходимости этого интеграла скомпенсированы вкладами операторов B^0_a в (7.2). Вообще, операторы B^0_a удобно выбрать таким образом, чтобы производная (7.2) обращалась в нуль в "точке нормировки", скажем, при $x = $ I. Это соответствует специальному выбору системы координат в S, такому, что

$$G_{ab}(g) = G_{ab}(g,1) = \delta_{ab} + O(g^2), \tag{7.5}$$

где $G_{ab}(g,R)$ – метрика (2.I7). При этом выборе системы координат, получаем, после несложных вычислений [I7]

$$\gamma_a^b(g) = \Delta_a\delta_{ab} + \sum_c C^a_{bc} g^c + O(g^2); \tag{7.6а}$$

$$\beta^a(g) = \epsilon_a g^a - \frac{1}{2}\sum_{b,c} C^a_{bc} g^b g^c + O(g^3), \tag{7.6б}$$

где

$$C^a_{bc} = (\epsilon_b+\epsilon_c-\epsilon_a) C_{abc} \tilde I^a_{bc} = 2\pi C_{abc} + O(\epsilon^3), \tag{7.7}$$

$$\tilde I^a_{bc} = \frac{1}{2}(I^b_{ac} + I^c_{ab} - I^a_{bc}) = 2\pi(\epsilon_b+\epsilon_c-\epsilon_a)^{-1} + O(\epsilon^2) \tag{7.8}$$

Первое из выражений (7.7) для коэффициентов C^a_{bc} в (7.6) является точным. При $\epsilon \ll$ I эти коэффициенты $C_{abc} = C^a_{bc}$ становятся симметричными по своим индексам и β-функции (7.6б), с точностью до членов $\sim g^3$, представляются в виде

$$\beta^a(g) = -\frac{1}{12}\sum_b G^{ab}(g)\frac{\partial C(g)}{\partial g^b}, \tag{7.9}$$

где

$$C(g) = C_0 - 6\sum_a \epsilon_a g^a g^a + 2\sum_{abc} C_{abc} g^a g^b g^c + O(g^4). \tag{7.I0}$$

Можно непосредственно проверить, что если C_0 – центральный заряд конформной теории $g=0$, то (7.I0) совпадает с разложением функции $C(g)$, определенной в §2.

В качестве примера рассмотрим окрестность неподвижной точки $\mathcal{M}_p$ (см. § 4) с $p \gg$ I, причем ограничимся возмущением вида

$$H_\lambda = H^{(p)} + \lambda\int \Phi^{(p)}(x)\, d^2x, \tag{7.II}$$

где $\mathcal{H}^{(p)}$ - действие конформной теории $\mathcal{M}_p$, а $\Phi^{(p)} \equiv \Phi_{(1,3)}$. Это возмущение выделено тем, что поле $\Phi_{(1,3)}$ в $\mathcal{M}_p$ принадлежит подалгебре $\mathcal{A}_{(1,*)} = \bigoplus_{n=1} [\Phi_{(1,n)}]$ (см.(4.9)) и при $p \gg 1$ является в этой подалгебре единственным полем с размерностью, близкой к I:

$$\Delta_{(1,3)} = 1 - \epsilon \quad ; \quad \epsilon = 2/(p+1). \qquad (7.12)$$

Поэтому соответствующую РГ можно рассматривать как однозарядную. Введем поле $\Phi_g(x)$ (отличающееся от $\Phi^{(p)}$ в (7.II) нормировкой) и новую константу связи $g = g(\lambda)$ так, чтобы выполнялись условия

$$G(g) = \langle \Phi_g(x) \Phi_g(0) \rangle |_{|x|=1} = 1 \quad ; \quad \Phi_g = \partial \mathcal{H}_g / \partial g, \qquad (7.13)$$

где $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{g(\lambda)}$ - действие (7.II), параметризованное новой константой связи g. Тогда поле $\Theta_g = -T^\mu_\mu$ в возмущенной теории (7.II) представляется в виде $\Theta_g = \beta(g)\Phi_g$, где $\beta(g)$ дается (7.6б):

$$\beta(g) = \epsilon g - \frac{2}{\sqrt{3}}(1 - \frac{3\epsilon}{2}) g^2 - \frac{4}{3} g^3 + \ldots , \qquad (7.14)$$

здесь мы не учли значения структурной константы $C_{(1,3)(1,3)(1,3)} = \frac{4}{\sqrt{3}}(1 - \frac{3\epsilon}{2} + O(\epsilon^2))$, которое легко получить из (4.18б), и выписали член $\sim g^3$, получение которого требует более сложных вычислений. Из (7.14) видно, что имеется новая неподвижная точка $g_{*1} = (\sqrt{3}\epsilon/2) \cdot (1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2))$. Учитывая условие унитарности, справедливое в $\mathcal{M}_p$, которое не может (при вещественных g) нарушиться в возмущенной теории, и утверждение § 2 об убывании функции С(g), можно заранее утверждать, что неподвижная точка g_{*1} соответствует какой-то модели $\mathcal{M}_{p'}$ с $p' < p$. Вычисление центрального заряда $c_1 = C(g_{*1})$ по формуле (7.10) с заданой точностью дает

$$c_1 = c_p - \frac{3}{2}\epsilon^3 - \frac{9}{4}\epsilon^4 + \cdots = c_{p-1}, \qquad (7.15)$$

т.е. неподвижная точка g_{*1} описывается моделью $\mathcal{M}_{p-1}$. Вычисление аномальных размерностей в g_{*1} по формуле (7.6а) также подтверждает этот вывод [17]. Таким образом, теория поля (7.II), имеющая ультрафиолетовую асимптотику $\mathcal{M}_p$, при $\lambda > 0$, имеет также конформно-инвариантную инфракрасную асимптотику, описываемую моделью $\mathcal{M}_{p-1}$.

На "промежуточных" масштабах конформная инвариантность в возмущенной теории (7.II) конечно нарушается и операторы L_n, введенные в § 3, не являются больше интегралами движения (исключение составляют генераторы (2.6) евклидовой симметрии, которая

разумеется, остается в (7.II)). Покажем, однако, что теория (7.II) с $\lambda \neq 0$ имеет "высшие" интегралы движения и является, по-видимому, вполне интегрируемой. Для этого удобнее пользоваться разложением в ряд по степеням константы связи λ (а не $g = g(\lambda)$, как делалось выше), поскольку λ (как и поле $\Phi \equiv \Phi^{(p)}$) имеет определенную масштабную размерность $\lambda \sim R^{-2\epsilon}$ и является единственным размерным параметром теории (7.II) (поскольку $\Delta = \Delta_{(1,3)} < 1$, ультрафиолетовые расходимости в (7.II) отсутствуют). В частности, выражение

$$\Theta = \epsilon \lambda \Phi \qquad (7.16)$$

для $\Theta = -T^\mu_\mu$ в теории (7.II) является точным, в соответствии с утверждением (2.15) о ренорминвариантности поля $T^{\mu\nu}$. Уравнения (2.19) с $\Theta = \epsilon\lambda\Phi$ нетрудно, конечно, получить, анализируя стандартный ряд теории возмущений (7.II)

$$Z_\lambda \langle X \rangle_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\lambda^n}{n!} \langle X \, \Phi(y_1) \ldots \Phi(y_n) \rangle_0 d^2y_1 \cdots d^2y_n , \qquad (7.17)$$

где X - произведение любых полей вида (I.6), Z_λ - "статсумма", даваемая рядом (7.17) с $X = 1$, а средние в правой части вычисляются в невозмущенной теории $\lambda = 0$, т.е. в $\mathcal{M}_p$. Для этого следует подставить $X = T(z,\bar{z}) X'$ в (7.17) и воспользоваться в правой части операторными разложениями (3.II), справедливыми при $\lambda = 0$.

Рассмотрим поле T_4, определяемое (при $\lambda = 0$) выражением (3.20). При $\lambda = 0$ это поле удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar{z}} T_4 = 0$. Если $\lambda \neq 0$, производная $\partial_{\bar{z}} T_4 = F = \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \cdots$ является локальным полем спина 3, причем коэффициенты $F_n \sim (R^{-1})^{5-2n\epsilon}$, т.е. имеют размерности $(4 - n\epsilon, 4 - n\epsilon)$. Из структуры ряда (7.17) видно, что эти коэффициенты строятся из полей, лежащих в подалгебре $\mathcal{A}_{(1,**)} = \bigoplus_{l=0}^{[(p-1)/2]} [\Phi_{(1,2l+1)}]$ модели $\mathcal{M}_p$. Так, поле F_1 имеет размерности $(4-\epsilon, 1-\epsilon)$ и является, следовательно, линейной комбинацией полей $L_{-3}\Phi$, $L_{-1}L_{-2}\Phi$, $L_{-1}^3\Phi$. Однако поле $\Phi = \Phi_{(1,3)}$ удовлетворяет уравнению (4.17), так что $L_{-3}\Phi$ выражается через остальные два. Поэтому, принимая во внимание (3.6), можно написать

$$\partial_{\bar{z}} T_4 = \partial_z G_2 + O(\lambda^2) \; ; \; G_2 = \epsilon\lambda (a_1 L_{-2}\Phi + a_2 \partial_z^2 \Phi). \qquad (7.18)$$

Безразмерные коэффициенты a_1, a_2 в (7.18) можно вычислить, подставляя $X = T_4(z) X'$ в правую часть (7.17) и пользуясь операторным разложением (4.10); в результате получается

$$a_1 = \frac{2\Delta}{\Delta+2}\ ;\ a_1 = \frac{\Delta}{6} + \frac{1}{30} - \frac{(5\Delta+1)(2\Delta-1)}{(2\Delta+1)(\Delta+1)} - \frac{3\Delta}{(2\Delta+1)(\Delta+2)}, \quad (7.19)$$

где $\Delta = \Delta_{(1,3)} = 1-\epsilon$. Обращаясь к высшим порядкам по λ, заметим, что конформные классы $[\Phi_{(1,2\ell+1)}]$ с $\ell > 0$ не могут вносить вклада в коэффициенты F_n с $n > 1$ т.к. не содержат полей подходящей размерности. Вообще, поправка к (7.18) может возникать только при нечетных p в порядке $\lambda^{\frac{p+1}{2}}$ от поля $\partial_z T$, которое имеет как-раз нужную размерность. Окончательно получаем

$$\partial_{\bar z} T_4 = \partial_z Q_2, \qquad (7.20)$$

где $Q_2 = \epsilon\lambda G_2$ при $p \in 2\mathbb{Z}$ и $Q_2 = \epsilon\lambda G_2 + \lambda^{1/\epsilon} d(\epsilon) T$ при $p \in 2\mathbb{Z}+1$; точное значение безразмерного коэффициента $d(\epsilon)$ на данном уровне анализа несущественно. Далее, рассмотрим производные $\partial_{\bar z} T_6^{(1)}$ и $\partial_{\bar z} T_6^{(2)}$, где $T_6^{(1)}$ и $T_6^{(2)}$ определены в (3.26). Аналогичные рассуждения показывают, что в первом порядке по λ эти производные являются линейными комбинациями следующих независимых полей спина 5: $L_{-5}\Phi$, $L_{-1}L_{-4}\Phi$, $L_{-1}^3 L_{-2}\Phi$, $L_{-1}^5\Phi$ (учтено условие (4.17)). Из них только первое не является производной по z, поэтому существует такая комбинация $T_6 = T_6^{(1)} + h\,T_6^{(2)}$, что

$$\partial_{\bar z} T_6 = \partial_z Q_4, \qquad (7.21)$$

где

$$Q_4 = \epsilon\lambda(b_1 L_{-4}\Phi + b_2 L_{-1}^2 L_{-2}\Phi + b_3 L_{-1}^4\Phi) + O(\lambda^2); \quad (7.22)$$

значения коэффициентов b_1, b_2, b_3 сейчас не важны. Более подробное вычисление показывает, что

$$T_6 = T_6^{(1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{28}{5} + c_p\right) T_6^{(2)}, \qquad (7.23)$$

где c_p дается (1.11), а уравнение (7.21), как и (7.20), является точным, причем поправки высших приближений к (7.22) возникают только при $p \in 2\mathbb{Z}+1$ в порядке $\lambda^{1/\epsilon}$: в этом случае в (7.22) вносят вклад поля T_4 и $\partial_z^2 T$. Уравнения (7.20) и (7.21) показывают, что в теории (7.11) имеются "высшие" интегралы движения

$$P_3 = \int (T_4\, dz - Q_2\, d\bar z)\ ;\ P_5 = \int (T_6\, dz - Q_4\, d\bar z) \qquad (7.24)$$

и аналогичные интегралы $\bar P_3$ и $\bar P_5$, построенные из полей $\bar T_4$ и $\bar T_6$. Непосредственным вычислением проверяется, что все операторы P_3, P_5, $\bar P_3$, $\bar P_5$ коммутативны между собой и с компонентами импульса $P = P_1 = \oint (T dz - \Theta d\bar z)$ и $\bar P = \bar P_1 = \oint (\bar T d\bar z - \Theta dz)$. Можно предполагать, что в теории (7.11) имеется полный набор коммутативных интегралов движения P_{2k+1}, $\bar P_{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (причем операторы P_{2k+1} и $\bar P_{2k+1}$ имеют спины $2k+1$ и $-2k-1$ соответственно), хотя эти операторы с $k > 2$ пока не построены.

Следует сделать два замечания. Во-первых, приведенный выше вывод уравнений (7.20) и (7.21) не зависит от малости величины ϵ. Поэтому "возмущенная" модель $\mathcal{M}_p$ (7.11) имеет "высшие" интегралы при всех $p = 3, 4, 5, \ldots$. Во-вторых, существование интегралов (7.24) не зависит также от знака λ в (7.11). При $\lambda < 0$, т.е. при $g < 0$, нет особых оснований ожидать существования каких-либо нетривиальных нулей β -функции (7.14). Если их нет, теория поля (7.11) с $\lambda < 0$ имеет конечный корреляционный радиус $R_c \sim \lambda^{-1/2\epsilon}$ и ее спектр состоит из частиц ненулевой массы $m \sim R_c^{-1}$. В этом случае интегралы движения (7.24) приводят к сохранению набора импульсов частиц при рассеянии, факторизации S -матрицы и т.д.

Наконец, отметим, что рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют установить существование "высших" интегралов движения в теориях $\mathcal{M}_p$, "возмущенных" оператором вида $\mu\int \Phi_{(1,2)}(x)\,dx$ и в ряде других моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. - М. Наука, 1982.
2. Вилсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. - М., Мир, 1975.
3. Поляков А.М. Конформная симметрия критических флуктуаций. - Письма в ЖЭТФ, 1970, т.12, 538.
4. Поляков А.М. Негамильтонов подход в конформной квантовой теории поля. - ЖЭТФ, 1974, т.66, 23.

5. Wilson K.G. Non-lagrangian models of current algebra. - Phys. Rev., 1969, v. 179, p.1499.
6. Паданов Л.П. Критические явления, гипотеза универсальности, скейлинг и капельная модель. В кн.: Квантовая теория поля и физика фазовых переходов. М., Мир, 1975.
7. Поляков А.М. Свойства далеких и близких корреляций в критической области. - ЖЭТФ, 1969, т.57, с.271.
8. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory. - Nucl. Phys., 1984, B241, p.333.
9. Mandelstam S. Dual resonance models. - Phys.Rep., 1974,v.130, N 6, p.259.
10. Schwarz T.H. Superstring theory. - Phys.Rep., 1982, v.89, N4,. p.223.
11. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings. - Phys.Lett. B, 1981, v.103, p.207; Quantum geometry of fermionic strings.- Phys. Lett. B, 1981, v.103, p.211.
12. Polyakov A.M. Fine structure of strings. - Nucl. Phys.,1986, B268, p.406.
13. Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E. Vacuum configurations for superstrings. - Nucl. Phys., 1985, B258, p.46.
14. Dotsenko Vl.S. Critical behaviour and associated conformal algebra of Z_3 - potts model. - T.Stat. Phys., 1984, 34, p.781.
15. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Conformal invariance , Unitarity and two-dimensional critical exponents. - Phys.Rev. Lett., 1984, v.52, p.1575.
16. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. - М., Мир, 1976.
17. Замолодчиков А.Б. Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, с.565.
18. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. - М., Мир, 1985.
19. Eichenherr H. Minimal operator algebras in superconformal quantum field theory. - Phys.Lett., 1985, B151, p.26.
20. Bershadski M., Knizhnik V., Teitelman M. Superconformal symmetry in two dimensions. - Phys.Lett., 1985, B151, p.31.
21. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Phys.Lett., 1985, B151,p.37.
22. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. - УМН, 1982, т.37, с.3.

23. Witten E. Non-Abelian bozonization in two dimensions. - Comm. Math. Phys., 1984, v.92, p.455.
24. Polyakov A.M., Wiegman P.B. Goldstone fields in two dimensions with multivalued action. - Phys.Lett., 1984, 141B, p.223.
25. Knizhnik V.G., Zamoloschikov A.B. Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. - Nucl. Phys., 1984, B247,83 p.
26. Замолодчиков А.Б. Бесконечные дополнительные симметрии в двумерной конформной теории поля. - ТМФ, 1985, 65, с.347.
27. Fradkin E., Kadanoff L.P. Nucl. Phys., 1980, B170, (FS 1),1.
28. Фатеев В.А., Замолодчиков А.Б. Нелокальные ("парафермионные") токи в двумерной конформной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в Z_N - симметричных статистических системах. - ЖЭТФ, 1985, 89, с.380; Поля беспорядка в двумерной конформной теории поля и $N=2$ расширенная суперсимметрия. - ЖЭТФ, 1986, 90, с.1553.
29. Fateev V.A., Zamolodchikov A.B. Spin 4/3 "Parafermionic" currents in two-dimensional conformal field theory. - Landau Institute Preprint, Chernogolovka, 1986.
30. Gepner D. New conformal field theories associated with Lie algebras and their partition functions. - Princeton Preprint, 1987.
31. Zamolodchikov Al.B. Conformal symmetry in two dimensions; An explicit recurence formula for the conformal partial wave amplitudes. - Comm. Math. Phys., 1984, 96, p.419.
32. Kac V. Lecture notes in physics. 1979, 94, p.441.
33. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Функциональный анализ и его приложения. 1982, 16, с.47.
34. Cardy T.L. Conformal invariance and surface critical behaviour. - Nucl. Phys., 1984, B240, (FS 12), p.514.
35. Equchi T., Ooguri H. Conformal and current algebras on general Riemann surfaces. - Preprint UT-491, Tokyo, 1986.
36. Cardy J.L. Conformal invariance and Yang-Lee edge singularity in two dimensions. - Phys.Rev.Lett., 1985, 54, p.1354.
37. Fisher M.E. Yang-Lee Edge singularity and φ^3 field theory. - Phys.Rev.Lett., 1978, 40, p.1610.
38. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. Conformal algebra and multi-point correlation functions in 2D statistical models. - Nucl. Phys. 1984, B240, (FS 12) p.312.

39. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. Operator algebra of the two-dimensional conformal theories with the central charge C 1. -Landau Institute Preprint, Chernogolovka, 1985.

40. Mc Coy B., Wu T.T. The two-dimensional Ising model. - Harvard University Press, Cambridge, MA, 1973.

41. Burkhart T.W., Guim I. Temple University Preprint, 1986.

42. Huse D.A. On the exact multicritical points in the restricted SOS models. - Phys.Rev., 1984, B30, p.3908.

43. Замолодчиков А.Б. Конформная симметрия и мультикритические точки в двумерной теории поля. - ЯФ, 1986, 44, стр. 821.

44. Замолодчиков А.Б., Погосян Р.Г. Операторная алгебра в двумерной суперконформной теории поля. - Препринт ИТФ, Черноголовка, 1987.

45. Замолодчиков Ал.Б. Конформная симметрия в двумерном пространстве функции критической модели Ашкина-Теллера. -ЖЭТФ, 1986, 90, с.1808.

46. Date E., Jimbo M., Kuniba A., Miwa T., Okado M. Exactly solvable SOS models: Local height probabilities and theta function identities. - Preprint RIMS-564, Kyoto, 1987.

47. Goddard P., Kent A., Olive D. Phys.Lett., 1985, B152, p.85.

48. Fateev V.A., Zamolodchikov A.B. Nucl.Phys., 1987.

Рукопись поступила 7 мая 1987 года

Александр Борисович Замолодчиков

Точные решения двумерной конформной теории поля
и критические явления

Утверждено к печати ученым советом
Института теоретической физики АН УССР

Редактор А.И.Королева Техн.редактор Е.А.Бунькова
БФ 32917 Зак. 480 Формат 60х84/16. Уч.-изд.л. 2,79
Подписано к печати 12.05.1987 года. Тираж 200. Цена 18 коп.
Полиграфический участок Института теоретической физики АН УССР