28. Windey P. Supersymmetric quantum mechanics and Atiyah-Singer index theorem. - Preprint TH.3758-CERN, 1983; Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. - Commun. Math. Phys., 1983, v.90, N 2, p.161-173; Girardello L., Imbimbo C., Mukhi S. On constant configurations and evaluation of the Witten index. - Preprint IC-88, ICTP, 1983.

29. Мигдал А.Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.

30. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля: Пер. с англ. М.: ИИЛ, 1963.

31. Parisi G., Sourlas N. Supersymmetric theories and stochastic differential equations. - Nucl. Phys. B, 1982, v. 206, p. 321-332.

32. Фейгельман М.В., Цвелик А.М. О скрытой суперсимметрии стохастической диссипативной динамики. - ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 4, с. 1430-1443.

33. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.

34. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.

35. Becchi C., Rouet A., Stora R. Renormalization of gauge theories. - Ann. Phys., 1976, v. 98, p. 287-321.

УДК 530.145

КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ПРИМЕНЕНИЕ К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Вл.С.Доценко*

I. Введение

Конформная инвариантность, естественно, обобщает понятие масштабной инвариантности, которое в настоящее время широко используется в квантовой теории поля, и в статистической физике при описании критических флуктуаций в точках фазового перехода.

Гипотеза о конформной инвариантности критических явлений была предложена А.М.Поляковым в 1970 г. [1]. В этой работе были получены ограничения на вид корреляционных функций основных операторов теории, которые следуют из условия конформной инвариантности.

*Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау АН СССР, Москва.

Адекватным для описания масштабно-инвариантных, т.е. безмассовых теорий является операторная формулировка теории поля, которая была развита в работах Вильсона, Каданова, Полякова [2,3,4]. При этом подходе спектром теории является набор основных полевых операторов $\{\Phi_k(x)\}$ и их масштабных размерностей $\{\Delta_k\}$. При масштабных преобразованиях пространства $x \to \tilde{x} = \lambda x$ операторы $\Phi_k(x)$ преобразуются по закону

$$x \to \lambda x ; \qquad \Phi_k(x) \to \lambda^{\Delta_k} \Phi_k(\lambda x) . \qquad (I.1)$$

Масштабная инвариантность теории означает, что корреляционные функции основных операторов $\langle \Phi_1(x_1)\, \Phi_2(x_2) \ldots \rangle$ являются инвариантными по отношению к преобразованию (I.1).

В теориях со взаимодействием размерности $\{\Delta_k\}$ является, вообще говоря, аномальными или неканоническими в отличие от размерностей операторов свободных теорий. Простейшим примером теории поля с аномальными размерностями является безмассовая модель Тирринга (модель двумерных фермионов с четырехфермионным взаимодействием) [5, 6]. В этой модели масштабные размерности операторов, в том числе размерности основных фермионных полей, зависят непрерывно от постоянной четырехфермионного взаимодействия. Большое разнообразие теорий такого типа дают критические флуктуации в точках фазового перехода в различных статистических системах.

В операторной теории вводится понятие операторной алгебры, т.е. предполагается, что произведение операторов, взятых в соседних точках, может быть разложено в линейную комбинацию основных операторов теории. В определенном смысле это естественно ожидать также с точки зрения перенормируемости теории. Если мы переходим при перенормировках от меньших масштабов к большим, то ожидается, что группу операторов, расположенных на малых расстояниях, можно будет разложить по тому же полному набору операторов теории, если есть перенормируемость.

Для произведения двух операторов имеем

$$\Phi_k(x)\, \Phi_n(x') = \sum_p \frac{C^p_{kn}}{|x-x'|^{(\Delta_k + \Delta_n - \Delta_p)}}\, \Phi_p(x') . \qquad (I.2)$$

Структурные коэффициенты C^p_{kn} операторной алгебры (I.2) являются основной динамической характеристикой конкретной теории наряду с ее спектром $\{\Phi_k, \Delta_k\}$.

Отметим аналогию с S-матричной формулировкой массивных полевых теорий. Спектром в этом подходе являются состояния на массовой поверхности (физические частицы) и их массы $\{m_k\}$. Динамика описывается S-матрицей рассеяния физических частиц.

В конкретной теории мы можем иметь оба режима. На малых расстояниях ($r m \ll 1$) мы можем иметь нетривиальную операторную теорию со спектром операторов и их аномальных размерностей, а на больших расстояниях ($r m \gg 1$) теория будет массивной. Для полных функций Грина или корреляционных функций на языке статистической физики асимптотика на малых расстояниях будет предметом вычисления безмассовой операторной теории. S-матричная массивная теория будет описывать окрестность полюсов функций Грина (в их импульсном представлении).

Такого рода полевые теории должны, в частности, описывать критические флуктуации в статистических системах в окрестности критических точек. Полное аналитическое решение такого типа имеется лишь для двумерной модели Изинга [7, 8]. Другой простой пример – массивная модель Тирринга. Известно, что эта модель описывает критическую область восьмивершинной модели Бакстера [9]. Для модели Тиррига имеется решение для обеих асимптотик: 1) функции Грина безмассовой модели [6]; 2) решение массивной модели для состояний на массовой поверхности (анзатц Бете) [8]. Полные функции Грина для этой модели неизвестны.

Вернемся к безмассовым теориям. Отметим, что имеется в виду безмассовость на "квантовом уровне", т.е. масса отсутствует не только в исходном лагранжиане теории, но и не образуется спонтанно, в том числе динамически, за счет взаимодействия флуктуаций.

Кроме того, считаем, что все β-функции, которые описывают перенормировку постоянных взаимодействия (зарядов) рассматриваемой теории, равны нулю, т.е. мы собираемся рассматривать нетривиальные теории в их фиксированных точках по отношению к перенормировкам.

Такие теории масштабно инвариантны. Они описываются спектром операторов Φ_k с аномальными масштабными размерностями Δ_k. Более сильное утверждение состоит в том, что такие теории также конформно инвариантны [1].

Локально, в малой окрестности, конформное преобразование сводится к масштабным преобразованиям (I.1), однако фактор растяжения λ может меняться от точки к точке $\lambda = \lambda(x)$. Класс конформных преобразований является значительно более узким по сравнению с общековариантными преобразованиями

$$x_\mu \to \tilde{x}_\mu = f_\mu(x) \tag{1.3}$$

Условие конформности может быть записано в виде

$$(d\tilde{x}_\mu)^2 = \lambda^2(x)(dx_\mu)^2. \tag{1.4}$$

Этому условию, очевидно, удовлетворяют преобразования трансляции, вращения и растяжения

$$\delta x_\mu = a_\mu \; ; \tag{I.5}$$

$$\delta x_\mu = \omega_{\mu\nu} x_\nu \; ; \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \; ; \tag{I.6}$$

$$\delta x_\mu = \varepsilon x_\mu \; . \tag{I.7}$$

Легко убедиться, что преобразование инверсии пространства

$$x_\mu \to \tilde{x}_\mu = x_\mu / x^2 \tag{I.8}$$

также удовлетворяет условию (I.4). Так называемое специальное конформное преобразование определяется с помощью последовательной комбинации преобразований инверсии, затем трансляции на вектор α_μ и снова инверсии. В результате получаем

$$x_\mu \to \tilde{x}_\mu = \frac{\frac{x_\mu}{x^2} + \alpha_\mu}{\left(\frac{x_\mu}{x^2} + \alpha_\mu\right)^2} \; . \tag{I.9}$$

Малое специальное конформное преобразование, т.е. линейное по параметрам α_μ, имеет вид

$$\tilde{x}_\mu \approx x_\mu + x^2 \alpha_\mu - 2(\alpha x) x_\mu . \tag{I.10}$$

Для этого преобразования

$$\begin{aligned} &(d\tilde{x}_\mu)^2 \approx (1 - 4(\alpha x))(dx_\mu)^2 ; \\ &\lambda(x) \approx 1 - 2(\alpha x) . \end{aligned} \tag{I.11}$$

(сравните формулу (I.4) [14]). Хорошо известно, что других преобразований, удовлетворяющих условию (I.4) и независимых от (I.5)–(I.7), (I.10), в пространстве размерности больше двух нет, т.е. конформная группа является конечно-параметрической. Она накладывает конечное число ограничений на вид корреляционных функций конформно-инвариантной теории [1]. Мы опишем их в следующем разделе.

Особая ситуация в этом отношении имеется в двумерном пространстве. В этом случае "малая" конформная группа, описанная выше, может быть расширена до бесконечномерной "большой" группы всех аналитических преобразований двумерной плоскости. В пространстве с эвклидовой метрикой удобно перейти к комплексным координатам $z = x_1 + i x_2$, $\bar{z} = x_1 - i x_2$. В этих координатах условие конформности (I.4) имеет вид

$$\text{при} \quad z \to \tilde{z} = f(z, \bar{z}) ; \; \bar{z} \to \tilde{\bar{z}} = \overline{f(z, \bar{z})} \; ; \tag{I.12}$$

$$d\tilde{z}\, d\tilde{\bar{z}} = \lambda^2(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z}. \qquad (I.13)$$

Очевидно, что любая аналитическая функция $f(z)$ в преобразовании (I.12), т.е. функция, зависящая только от z, но не зависящая от $\bar{z}$, удовлетворит условию (I.13)

$$d\tilde{z}\, d\tilde{\bar{z}} = \left| \frac{d f(z)}{dz} \right|^2 dz\, d\bar{z}. \qquad (I.14)$$

Малая форма аналитического преобразования может быть представлена в виде

$$z \to z + \alpha(z); \quad \bar{z} \to \bar{z} + \overline{\alpha(z)}; \qquad (I.15)$$

$$\alpha(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^{n+1}. \qquad (I.16)$$

Коэффициенты $\{a_n\}$ в формуле (I.16) являются параметрами "большой" конформной группы преобразований двумерного пространства. Эта группа бесконечно-параметрическая.

Имеющийся в настоящее время решающий прогресс в описании двумерных конформно-инвариантных теорий поля, достигнутый в работе Белавина, Полякова, Замолодчикова [10], а также прогресс в двумерной статистической физике, полученный в результате применения теории [10] к описанию критических флуктуаций в двумерных статистических системах [11-16], обусловлен использованием большой группы конформных преобразований двумерного пространства. В настоящее время уже имеется значительная литература по развитию конформной теории [10] и ее применениям.

Конформная теория дает возможность находить весь спектр операторов конкретной теории и их аномальных размерностей, вычислять в принципе любые многоточечные функции Грина, вычислять структурные константы операторной алгебры (I.2). Уже получены совершенно новые результаты по новым нетривиальным теориям поля и их операторным алгебрам. Получено также точное описание критических явлений в большом числе известных двумерных статистических моделей. Фактическая ситуация здесь состоит в том, что любая двумерная статистическая система в своей точке фазового перехода второго рода описывается точно решаемой теорией, которую следует искать среди представлений конформной теории.

В этой лекции мы опишем основные черты конформной теории [10] и ее применений для вычисления корреляционных функций и операторных алгебр [12-14]. В качестве иллюстрации будут приведены некоторые примеры из статистической физики.

2. Общие свойства конформно-инвариантной теории. Конформное тождество Уорда

Начнем с условий, накладываемых на корреляционные функции малой конформной группой, которая существует в пространстве произвольной размерности [1]. Обычные инвариантности (I.5)-(I.7) легко учитываются, поэтому достаточно рассмотреть специальное конформное преобразование (I.10). Рассмотрим некую корреляционную функцию конформно-инвариантной теории

$$\langle \Phi_1(x_1)\, \Phi_2(x_2) \ldots \rangle \qquad (2.1)$$

для операторов $\Phi_k(x)$ с размерностями Δ_k. Предполагается, что если произвести преобразование координат (I.10) и одновременно умножить каждый из операторов в функции (2.1) на масштабный множитель (сравните формулы (I.1), (I.11))

$$(\lambda(x_k))^{\Delta_k} \approx (1 - 2(\alpha x))^{\Delta_k} \approx 1 - 2\Delta_k (\alpha x), \qquad (2.2)$$

то функция (2.1) не должна измениться, т.е.

$$\delta \langle \Phi_1(x_1)\, \Phi_2(x_2) \ldots \rangle = 0 \qquad (2.3)$$

при

$$x_i^\mu \to \tilde{x}_i^\mu \approx x_i^\mu + x_i^2 \alpha^\mu - 2(\alpha x_i) x_i^\mu; \qquad (2.4)$$

$$\Phi(x) \to \tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \lambda^\Delta(x)\, \Phi(\tilde{x}(x)) \approx (1 - 2\Delta(\alpha x))\Phi(\tilde{x}(x)). \qquad (2.5)$$

Обычные инвариантности (I.5)-(I.7) предполагают, что функция (2.1) зависит лишь от модулей парных разностей координат $\{x_i\}$: $x_{ij} = |x_i - x_j|$. Из формулы (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij}^2 &\approx x_{ij}^2 (1 - 2(\vec{\alpha}, \vec{x}_i + \vec{x}_j)); \\ \tilde{x}_{ij} &\approx x_{ij} (1 - (\vec{\alpha}, \vec{x}_i + \vec{x}_j)); \\ \delta \ln x_{ij} &\approx -(\vec{\alpha}, \vec{x}_i + \vec{x}_j). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Из формулы (2.5)

$$\delta \Phi_i = -2\Delta_i (\alpha x_i)\, \Phi_i. \qquad (2.7)$$

Собирая вместе вариацию функции (2.1) за счет изменений координат (2.6), и вследствие умножения операторов на масштабные множители (2.7), получим, согласно условию (2.3),

$$\delta\langle \Phi_1(x_1)\ \Phi_2(x_2)\dots\rangle =$$

$$=\Big\{\sum_{i<j}\ \delta x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} - \sum_i 2\Delta_i(\alpha x_i)\Big\}\langle\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\dots\rangle = 0.$$

Или, используя формулу (2.6),

$$-\sum_{i<j}(\vec{\alpha},\ \vec{x}_i+\vec{x}_j)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\langle\Phi_1\dots\rangle = 2\sum_i\Delta_i(\alpha x_i)\langle\Phi_1\dots\rangle. \qquad (2.8)$$

Сумма членов в уравнении (2.8) при каждом из (αx_i) должна зануляться независимо. Т.е. получаем систему уравнений

$$\sum_{j(\neq i)}\frac{\partial}{\partial\xi_{ij}}\langle\Phi_1\dots\rangle = -2\Delta_i\langle\Phi_1\dots\rangle. \qquad (2.9)$$

Здесь $\xi_{ij} = \ln x_{ij}$.

Для двухточечной функции из системы (2.9) следует

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{12}}\langle\Phi_1\Phi_2\rangle = -2\Delta_1\langle\Phi_1\Phi_2\rangle;$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi_{21}}\langle\Phi_1\Phi_2\rangle = -2\Delta_2\langle\Phi_1\Phi_2\rangle. \qquad (2.10)$$

Т.е. либо

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta;\quad \langle\Phi_\Delta(x)\ \Phi_\Delta(0)\rangle = \frac{const}{|x|^{2\Delta}}, \qquad (2.11)$$

либо, если $\Delta_1\neq\Delta_2$, тогда $\langle\Phi_1\Phi_2\rangle = 0$. Это своего рода условие ортогональности операторов [I]. Для трехточечной функции система (2.9) имеет вид

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_{12}}+\frac{\partial}{\partial\xi_{13}}\Big)\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle = -2\Delta_1\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle;$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_{21}}+\frac{\partial}{\partial\xi_{23}}\Big)\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle = -2\Delta_2\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle; \qquad (2.12)$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_{31}}+\frac{\partial}{\partial\xi_{32}}\Big)\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle = -2\Delta_3\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle.$$

И ее решение [I]

$$\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle = \frac{const}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\ x_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}\ x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}. \qquad (2.13)$$

Для четырехточечной функции $\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\rangle$ число переменных x_{ij} или $\xi_{ij}=\ln x_{ij}$ равно 6, а число уравнений в системе (2.9) равно четырем. Т.е. система уравнений (2.9) в этом случае уже не определяет полностью корреляционную функцию. Легко проверить, что общее решение (2.9) имеет вид [I]

$$\langle\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\rangle = \frac{f(\eta_1,\eta_2)}{\prod_{i<j}(x_{ij})^{\Delta_i+\Delta_j-1/3\sum_k\Delta_k}}. \qquad (2.14)$$

Здесь

$$\eta_1 = \frac{x_{12}\,x_{34}}{x_{13}\,x_{24}};\qquad \eta_2 = \frac{x_{14}\,x_{23}}{x_{13}\,x_{24}} \qquad (2.15)$$

два независимых ангармонических отношения, которые инвариантны по отношению к конформным преобразованиям (I.5)-(I.7), (I.10); $f(\eta_1,\eta_2)$ - произвольная функция. Легко получить ограничения на вид других многоточечных функций. При этом всегда остаются неизвестными функции от всех возможных ангармонических отношений, какие имеются при данном числе точек.

Обратимся теперь к двумерной теории [10]. Будем пользоваться комплексными координатами $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Малые конформные преобразования могут быть представлены в виде (I.15),(I.16) Эти преобразования будут действительно малыми, если мы будем считать, что наша теория определена на конечной области двумерной плоскости, содержащей начало координат (рис. I), и параметры являются малыми.

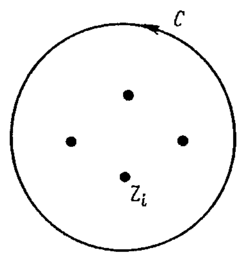


Рис. I. Область определения теории, C-граница

Операторы теории преобразуются по закону (сравните с формулами (I.I), (I.13), (I.14))

$$z\to\tilde{z}=f(z);\quad \Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})\to\Big(\frac{df}{dz}\Big)^{\Delta}\Big(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\Big)^{\bar{\Delta}}\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(f(z),\overline{f(z)}). \qquad (2.16)$$

Малая форма этого преобразования, т.е. для $f(z) = z + \alpha(z)$, имеет вид

$$\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})\to\tilde{\Phi}_{\Delta,\bar{\Delta}}(\tilde{z},\bar{\tilde{z}}) =$$

$$=\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})+\big[\alpha(z)\partial_z+\alpha'(z)\Delta+\overline{\alpha(z)}\partial_{\bar{z}}+\overline{\alpha'(z)}\bar{\Delta}\big]\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z}). \qquad (2.17)$$

Кроме основных операторов Φ_k с законом преобразования (2.I6) конформная теория всегда содержит еще один оператор, тензор энергии импульса $T_{\mu\nu}$, через который определяются генераторы конформных преобразований. В координатах $z, \bar z$ он имеет компоненты

$$T_{zz}\ ,\quad T_{z\bar z}\ ,\quad T_{\bar z z}\ ,\quad T_{\bar z\bar z}\ . \tag{2.18}$$

Сейчас мы выведем тождество Уорда для корреляционных функций, которое следует из конформной инвариантности. Предположим, что наша теория определена на конечной области двумерной плоскости с границей C, как на рис. I, и мы интересуемся многоточечной корреляционной функцией

$$\langle \Phi_1(z_1\bar z_1)\,\Phi_2(z_2\bar z_2)\,\Phi_3(z_3\bar z_3)\dots\rangle . \tag{2.19}$$

Представим, что эта функция вычисляется как функциональный интеграл по некоему основному полю $\varphi(z,\bar z)$ (в модели Тирринга это было бы поле фермионов, а среди операторов Φ_k могут быть составные операторы, например, $\bar\psi\psi$ и другие). Функциональный интеграл вычисляется с весом $exp\{A[\varphi]\}$, где $A[\varphi]$ – некое действие для поля φ. Под функциональным интегралом мы можем сделать вариацию полей, соответствующую конформному, преобразованием двумерного пространства (I.I5). Корреляционная функция (2.I9) от замены переменных под функциональным интегралом измениться не может. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\delta\langle\Phi_1\Phi_2\dots\rangle &= \sum_i\big[\alpha(z_i)\partial_i + \alpha'(z_i)\Delta_i + \\ &+ \overline{\alpha}(z_i)\bar\partial_i + \overline{\alpha}'(z_i)\bar\Delta_i\big]\langle\Phi_1\Phi_2\dots\rangle - \\ &- \oint_C d\xi_\mu\,\alpha_\nu(\xi)\,\langle T_{\mu\nu}(\xi)\,\Phi_1\,\Phi_2\dots\rangle .\end{aligned} \tag{2.20}$$

Первый член в формуле (2.20) возникает от конформного преобразования "источников" - операторов $\Phi_k(z_k,\bar z_k)$ в (2.I9). Второй член есть результат вариации действия $A[\varphi]$, причем, вследствие конформной инвариантности теории, возникает только интеграл по границе C (см. рис. I). $T_{\mu\nu}(\xi)$ в функции (2.20) есть тензор энергии-импульса, который обычно определяется, таким образом, через преобразование однородных трансляций, т.е. $\alpha_\nu(\xi) = \alpha_\nu = const$.

Вариация корреляционной функции (2.20) должна быть равна нулю. Переходя везде к компонентам $(z,\bar z)$, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\big[\alpha(\xi)\langle T_{zz}(\xi,\bar\xi)\,\Phi_1\Phi_2\dots\rangle + \overline{\alpha}(\xi)\langle T_{\bar z z}(\xi,\bar\xi)\Phi_1\Phi_2\dots\rangle\big] \\ &- \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar\xi\big[\overline{\alpha}(\xi)\langle T_{\bar z\bar z}(\xi,\bar\xi)\Phi_1\Phi_2\dots\rangle + \alpha(\xi)\langle T_{z\bar z}(\xi,\bar\xi)\Phi_1\Phi_2\dots\rangle\big] = \\ &= \sum_i\big[\alpha(z_i)\partial_i + \alpha'(z_i)\Delta_i + \overline{\alpha}(z_i)\bar\partial_i + \overline{\alpha}'(z_i)\bar\Delta_i\big]\langle\Phi_1\Phi_2\dots\rangle .\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь множители $1/2\pi$ перед интегралом по границе соответствуют выбору определенной нормировки операторов $T_{zz}, T_{\bar z z}, T_{z\bar z}, T_{\bar z\bar z}$. В частности, для $\alpha(z) = a = const$ (трансляция) и для $\alpha(z) = \varepsilon(z - z_0)$ (однородное растяжение относительно точки z_0) мы получим из формулы (2.2I) обычные законы сохранения

$$\partial_{\bar z}\langle T_{zz}(z,\bar z)\,\Phi_1(z_1\bar z_1)\Phi_2(z_2\bar z_2)\dots\rangle = 0\,; \tag{2.23}$$

$$\langle T_{z\bar z}(z,\bar z)\,\Phi_1(z_1\bar z_1)\,\Phi_2(z_2\bar z_2)\dots\rangle = 0 \tag{2.24}$$

при $z \neq z_i$. Из формулы (2.23) следует, что оператор T_{zz} не зависит от $\bar z$ (аналогично $T_{\bar z\bar z}$ не зависит от z). Из формулы (2.24) заключаем, что в масштабно инвариантной теории $T_{z\bar z} = 0$, т.е. все корреляционные функции оператора $T_{z\bar z}(z,\bar z)$ с другими операторами равны нулю при $z \neq z_i$.

С учетом этих замечаний уравнение (2.2I) приводится к виду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi\,\alpha(\xi)\langle T_{zz}(\xi)\,\Phi_1(z_1\bar z_1)\Phi_2(z_2\bar z_2)\dots\rangle - \\ &- \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar\xi\,\overline{\alpha}(\xi)\langle T_{\bar z\bar z}(\bar\xi)\,\Phi_1(z_1\bar z_1)\Phi_2(z_2\bar z_2)\dots\rangle = \\ &= \sum_i\big(\alpha(z_i)\partial_i + \alpha'(z_i)\Delta_i + \overline{\alpha(z_i)}\,\bar\partial_i + \overline{\alpha'(z_i)}\,\bar\Delta_i\big)\langle\Phi_1\Phi_2\dots\rangle .\end{aligned} \tag{2.25}$$

Отметим существенный факт, что переменные z и $\bar z$ разделились. Действительно, уравнение (2.25) имеет вид суммы двух независимых уравнений по переменным z и по переменным $\bar z$. Это означает, что все соотношения конформной теории можно писать только по одной из переменных, например z. Поэтому мы можем временно забыть о переменных $\{\bar z_i\}$. Позже при фактическом вычислении корреляционных функций мы восстановим их зависимость от $\{\bar z_i\}$, исходя из определенных условий симметрии.

В частности, для двухточечной функции

$$\langle\Phi(z,\bar z)\,\Phi(z',\bar z')\rangle \sim \frac{1}{|z-z'|^{2\Delta_{ph}}} = \frac{1}{(z-z')^{\Delta_{ph}}\,(\bar z-\bar z')^{\Delta_{ph}}}\,, \tag{2.26}$$

забыв о переменных $\bar{z}$, мы будем писать

$$\langle \Phi(z)\,\Phi(z')\rangle \sim \frac{1}{(z-z')^{\Delta ph}} \equiv \frac{1}{(z-z')^{2\Delta}} . \tag{2.27}$$

Отметим, что для таких "скалярных" операторов, т.е. операторов с $\Delta = \bar{\Delta}$ конформная размерность Δ равна половине их физической размерности

$$\Delta = \frac{1}{2}\,\Delta_{ph} . \tag{2.28}$$

Теперь мы можем переписать соотношение (2.25) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\,\mathcal{L}(z)\langle T(z)\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\ldots\rangle =$$
$$= \sum_i \left(\mathcal{L}(z_i)\partial_i + \mathcal{L}'(z_i)\Delta_i\right)\langle \Phi_1(z_1)\,\Phi_2(z_2)\ldots\rangle . \tag{2.29}$$

Здесь $T(z) = T_{zz}(z)$. Далее, мы можем ввести маленькие контуры C_i, окружающие точки z_i (рис. 2), и переписать правую часть соотношения (2.29) через сумму контурных интегралов

$$\sum_i \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz\,\mathcal{L}(z)\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i\right)\langle \Phi_1\Phi_2\ldots\rangle$$

и затем, деформируя контуры C_i на рис. 2, мы превратим эту сумму в один интеграл по границе области С. Таким образом, из соотношения (2.29) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\,\mathcal{L}(z)\langle T(z)\,\Phi_1\,\Phi_2\ldots\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\,\mathcal{L}(z)\sum_i\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i\right)\langle\Phi_1\Phi_2\ldots\rangle . \tag{2.30}$$

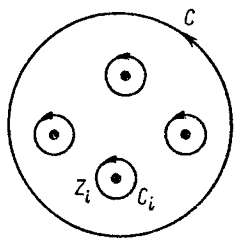


Рис.2. Контуры, окружающие точки Z

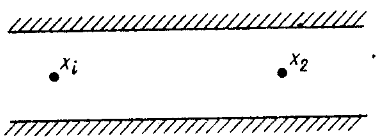


Рис.3. Корреляционная функция на полосе

Наконец, так как функция $\mathcal{L}(z)$ произвольна, мы можем убрать интеграл и получить локальное соотношение на корреляционные функции [10]

$$\langle T(z)\,\Phi_1\Phi_2\ldots\rangle = \sum_i\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i\right)\langle\Phi_1\Phi_2\ldots\rangle . \tag{2.31}$$

Это соотношение, которое можно называть конформным тождеством Уорда, является основным при построении конформной теории.

При операторной формулировк теории соотношение (2.31) можно рассматривать также как исходную точку, как собственно утверждение, что теория операторов Φ_k является конформно инвариантной, что в ней есть оператор $T(z)$, корреляционные функции которого определены соотношением (2.31).

Независимо от точки зрения на "первоосновы", дальнейшее построение конформной теории будет основано на соотношении (2.31).

Чтобы отвлечься на время от формальной теории, мы приведем простой и, возможно, поучительный пример использования общих конформных преобразований в двумерной статистической физике.

Выше, используя общую конформную группу, мы получили соотношение (2.31), которое связывает одни корреляционные функции с другими. В частности, это означает, что в общем случае корреляционные функции конформно-инвариантной теории не являются инвариантными по отношению к конформным преобразованиям (исключение составляет малая конформная группа или группа дробнолинейных преобразований комплексной плоскости). Вместо инвариантности мы имеем тождество Уорда (2.31).

Однако общие конформные преобразования можно использовать также совсем по другому. Учитывая, что при конформных преобразованиях изменяется также форма области, на которой задана теория, мы можем для конформно инвариантной теории найти корреляционные функции для области с одной геометрией, по корреляционным функциям для другой геометрии, если известно конформное преобразование от одной области к другой. Корреляционные функции для двух областей будут, вообще говоря, совершенно различными.

В двумерной статистике в течение нескольких лет изучался "скейлинг" статистических моделей на решетках, бесконечных по одному направлению, и конечных по другому (рис. 3) (при температуре фазового перехода для бесконечной двумерной решетки, так что корреляционный радиус двумерной решетки был бы бесконечным). Для системы, конечной по одному направлению, корреляции по другому направлению будут иметь корреляционный радиус, пропорциональный поперечному размеру системы ℓ (см. рис. 3). Это хорошо известный факт, который нетрудно понять из общих соображений. Для простоты считаем, что имеется в виду статистические системы с короткодействием. Таким образом, двухточечная корреляционная функция на полоске рис. 3 будет иметь вид

$$\langle \Phi_\Delta(x_1)\,\Phi_\Delta(x_2)\rangle \sim e^{-\frac{x}{R_c}} , \tag{2.32}$$

где

$$R_c^{-1} = const \cdot \ell^{-1}. \qquad (2.33)$$

Собственно, измерялась зависимость корреляционного радиуса от поперечного размера ℓ, т.е. $const$ в соотношении (2.33). Отметим, что поперечный размер ℓ на рис. 3 всегда берется много больше решеточных расстояний, так чтобы была примерная непрерывная теория и соотношения скейлинга.

На многочисленных машинных экспериментах с различными моделями и на точном решении для модели Изинга была установлена зависимость

$$const = 2\pi\Delta, \qquad (2.34)$$

где $\Delta - \Delta_{pk}$ – размерность изучаемого оператора на бесконечной двумерной решетке. Зависимость (2.34) была загадкой нескольких лет (см., например, работу [I5]).

Это соотношение нашло естественное и простое объяснение при использовании конформной инвариантности [I6]. Корреляционная функция на бесконечной плоскости имеет вид

$$\langle \Phi(z_1\bar z_1)\Phi(z_2\bar z_2)\rangle \sim \frac{1}{|z_1 - z_2|}^{2\Delta}. \qquad (2.35)$$

Мы можем превратить плоскость в полосу шириной 2π, сделав конформное преобразование

$$u = \ln z. \qquad (2.36)$$

При этом корреляционная функция на полосе следует из функций (2.35) и (2.36) (см. рис. 4, где для упрощения мы выбрали специальную конфигурацию точек на плоскости z и на полосе u)

$$\langle \Phi(z)\Phi(1)\rangle = \frac{1}{|z-1|}^{2\Delta} \longrightarrow \left\{ z = f(u) = e^{u} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle \Phi(x)\Phi(0)\rangle = \left|\frac{df(u)}{du}\right|^{\Delta} \left|\frac{df(u')}{du'}\right|^{\Delta} \frac{1}{|e^{u} - e^{u'}|}^{2\Delta} = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ u' = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^{x\Delta} \cdot e^{-2\Delta \ln(e^{x} - 1)}.$$

При $x \gg 1$ находим

$$\langle \Phi(x)\Phi(0)\rangle \approx e^{-\Delta \cdot x}. \qquad (2.37)$$

Вспомним, что при преобразовании (2.36) мы получили полосу шириной 2π. Полоса шириной ℓ получится при преобразовании

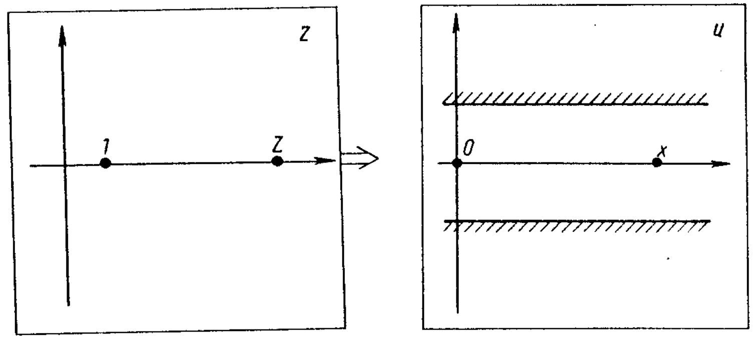


Рис.4,5. Конформное отображение плоскости в полосу

$$u = \frac{\ell}{2\pi} \ln z. \qquad (2.38)$$

При этом, вместо соотношения (2.37) получим при $x \gg \ell$

$$\langle \Phi(x)\Phi(0)\rangle \approx e^{-\frac{2\pi}{\ell}\Delta \cdot x} \qquad (2.39)$$

Сравнивая соотношения (2.39) и (2.32), получаем соотношение (2.34) [I6].

Подобным образом можно получить ряд других соотношений. Можно также использовать связь (2.34) в обратном направлении: измеряя на полосках зависимость R_c^{-1} от ℓ, что относительно просто, находить масштабную размерность Δ интересующих операторов [I6, I7].

3. Спектр операторов конформной теории. Алгебра Вирассоро для генераторов конформных преобразований

Предположим, что мы изучаем спектр операторов конформной теории [I0]. Мы уже имеем основные операторы Φ_k с законами преобразования (2.I6), (2.I7) и операторной алгеброй (I.2), а также оператор $T(z)$, порождаемый конформными преобразовани ми и входящий в тождество Уорда (2.3I). Мы получим новую серию операторов, если рассмотрим операторное разложение для произведения $T\Phi$

$$T(z)\Phi_1(z_1) = \frac{\Delta_1}{(z-z_1)^2}\Phi_1(z_1) + \frac{1}{z-z_1}\partial_1\Phi_1(z_1) + \\ + \Phi_1^{(-2)}(z_1) + (z-z_1)\Phi_1^{(-3)}(z_1) + \dots \qquad (3.1)$$

Отсутствие более сингулярных членов в этом разложении $\sim 1/(z-z_1)^3$, $1/(z-z_1)^4$, ..., а также явная форма операторов при сингулярных членах $1/(z-z_1)^2$ и $1/(z-z_1)$, следуют из тождества Уорда (2.31). Операторы $\Phi^{(-2)}(z_1)$, $\Phi^{(-3)}(z_1)$, ... являются, вообще говоря, новыми. В частности, можно будет убедиться, что закон преобразования этих операторов отличается от закона конформных преобразований операторов Φ_k (2.16), (2.17). Говоря кратко, преобразование операторов $\Phi^{(-2)}, \Phi^{(-3)}$, ... следует из разложения (3.1) и условия конформной инвариантности произведения $T(z)\Phi_1(z_1)$.

Мы представим операторы $\Phi^{(-n)}$ в разложении (3.1) как результат применения операторов L_{-n} к Φ

$$\Phi^{(-n)}(z_1) = L_{-n}\,\Phi(z_1)\,. \qquad (3.2)$$

Формально операторы $L_n(z_1)$ можно также определить как коэффициенты разложения $T(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_1)$

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L_n(z_1)}{(z-z_1)^{n+2}}\,. \qquad (3.3)$$

Фактически операторы L_n определены операторным разложением (3.1). Таким образом, мы имеем

$$T(z)\Phi(z_1) = \frac{\Delta_1}{(z-z_1)^2}\Phi(z_1) + \frac{1}{z-z_1}\partial\Phi(z_1) + L_{-2}\Phi(z_1) + (z-z_1)L_{-3}\Phi(z_1) + \ldots$$

$$+\ldots \equiv \frac{1}{(z-z_1)^2}L_0\Phi(z_1) + \frac{1}{z-z_1}L_{-1}\Phi(z_1) + L_{-2}\Phi(z_1) + (z-z_1)L_{-3}\Phi(z_1) + \ldots \qquad (3.4)$$

Отметим, что согласно формулам (3.1), (3.3), (3.4),

$$L_n(z_1)\,\Phi_\Delta(z_1) \equiv L_n\,\Phi_\Delta(z_1) = 0\,,\quad n>0\,; \qquad (3.5)$$

$$L_0\,\Phi_\Delta(z_1) = \Delta\cdot\Phi_\Delta(z_1)\,; \qquad (3.6)$$

$$L_{-1}\,\Phi_\Delta(z_1) = \partial_1\Phi(z_1)\,. \qquad (3.7)$$

Таким образом, из произведения $T(z)\Phi(z_1)$ мы получили новое семейство операторов

$$\Phi(z_1) \to T(z)\Phi(z_1) \to \left\{\Phi^{(-n)}(z_1) = L_{-n}\Phi(z_1),\ n\geqslant 1\right\}. \qquad (3.8)$$

Далее, мы можем взять произведение $T(z)\,T(z')\,\Phi(z_1)$.

Аналогичным образом, например, подставив разложение (3.3), мы получим еще одно семейство операторов

$$T(z)\,T(z')\,\Phi(z_1) \to \left\{\Phi^{(-n_1,-n_2)}(z_1) = L_{-n_1}L_{-n_2}\Phi(z_1)\right\}\,. \qquad (3.9)$$

и т.д. Полное семейство "операторов-потомков", растущих из одного основного оператора $\Phi(z_1)$, имеет вид [10]

$$\Phi_\Delta^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)}(z_1) = L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}\Phi_\Delta(z_1),\ n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_k\,; \qquad (3.10)$$

$$\Delta^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)} = \Delta + N\,,\quad \sum_{i=1}^{k} n_i = N\,.$$

Здесь $N = 1, 2, \ldots$, $\Delta^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)}$ – конформная размерность оператора $\Phi^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)}(z_1)$:

$$L_0\,\Phi^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)}(z_1) = \Delta^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)}\,\Phi^{(-n_1,\ldots,-n_k)}(z_1)\,. \qquad (3.11)$$

(сравните с формулой (3.6)).

Набор операторов $T(z)$, $\Phi_k(z)$ и всех их потомков (3.10), растущих над каждым из операторов Φ_k, составляет полный спектр операторов конформной теории. Отметим, что операторы-потомки (3.10) присутствуют также и в полном операторном разложении для произведения операторов Φ_k (1.2). Каждый из операторов Φ_p в правой части формулы (1.2) представляет в действительности целый ряд из операторов (3.10), состоящих при целых степенях $(z - z')$. Более точно разложение (1.2) записывается в виде [10]

$$\Phi_k(z)\,\Phi_n(z') = \sum_p \frac{C^p_{kn}}{(z-z')^{\Delta_k+\Delta_n-\Delta_p}}\Big[\Phi_p(z') +$$

$$+\sum_{N=1}^{\infty}(z-z')^N \sum_{\{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots;\,\sum n_i = N\}} \beta_{kn,p}^{(-n_1,-n_2,\ldots)}\,\Phi_p^{(-n_1,-n_2,\ldots)}(z')\Big]. \qquad (3.12)$$

Все коэффициенты $\beta_{kn,p}^{(-n_1,-n_2,\ldots)}$ в этом разложении однозначно вычисляются из условия конформной инвариантности всего ряда (конформной инвариантности произведения $\Phi_k(z)\Phi_n(z')$, в конечном итоге) [10]. С другой стороны, структурные коэффициенты операторной алгебры одной лишь конформной инвариантностью произведения $\Phi_k(z)\Phi_n(z')$ не определяются. Они являются динамической характеристикой конкретной теории. Технику их вычисления для специального класса конформных теорий мы опишем в конце лекции.

Прежде всего нам следует выяснить свойства операторов Φ (3.10). Для этого, очевидно, следует установить коммутационные соотношения операторов $\{L_n\}$:

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \Phi - L_{-n_2} L_{-n_1} \Phi = ? \qquad (3.13)$$

Операторное разложение (3.4) с учетом формул (3.5)-(3.7) можно переписать в виде

$$T(\xi)\,\Phi(z) = \sum_n \frac{1}{(\xi - z)^{n+2}}\, L_n\, \Phi(z). \qquad (3.14)$$

Отсюда легко увидеть, что действие оператора L_n на $\Phi(z)$ можно также представить следующим образом:

$$L_n\, \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi\, (\xi - z)^{n+1}\, T(\xi)\, \Phi(z). \qquad (3.15)$$

Здесь контур C_z окружает точку z. Эта запись удобна для вычисления коммутации операторов L_n. Легко проверить в такой записи выполнение свойств (3.5)-(3.7). Для этого нужно воспользоваться при вычисления интеграла в формуле (3.15) операторным разложением для $T(\xi)\Phi(z)$ (3.1).

Вычислим теперь коммутатор $[L_n, L_m]$. По определению (3.15) имеем

$$L_n L_m\, \Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_2} d\xi_2 \oint_{C_1} d\xi_1\, (\xi_2 - z)^{n+1} (\xi_1 - z)^{m+1}\, T(\xi_2) T(\xi_1) \Phi(z), \qquad (3.16)$$

$$L_m L_n\, \Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1} d\xi_1 \oint_{C_2} d\xi_2\, (\xi_1 - z)^{m+1} (\xi_2 - z)^{n+1}\, T(\xi_1) T(\xi_2)\, \Phi(z). \qquad (3.17)$$

Упорядочение операторов L_n, L_m определяется упорядочением контуров интегрирования в формулах (3.16), (3.17) (см. рис. 5 и 6 соответственно).

Вычитая выражение (3.17) из соотношения (3.16), получаем (рис. 7):

$$(L_n L_m - L_m L_n)\, \Phi(z) =$$

$$= \oint_{C_z} d\xi_1 (\xi_1 - z)^{m+1} \oint_{C_{\xi_1}} d\xi_2 (\xi_2 - z)^{n+1}\, T(\xi_2)\, T(\xi_1)\, \Phi(z). \qquad (3.18)$$

Для вычисления интеграла по контуру C_{ξ_1} мы можем воспользоваться операторным разложением для произведения $T(\xi_2) T(\xi_1)$. Соответствующее тождество Уорда имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T(z) T(z') \Phi_1(z_1) \dots \rangle &= \frac{c/2}{(z-z')^4} \langle \Phi_1 \dots \rangle + \\ &+ \left[\frac{2}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'} \partial_{z'} \right] \langle T(z') \Phi_1 \dots \rangle + \\ &+ \sum_{i=1,2\dots} \left[\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \partial_i \right] \langle T(z') \Phi_1 \dots \rangle . \end{aligned} \qquad (3.19)$$

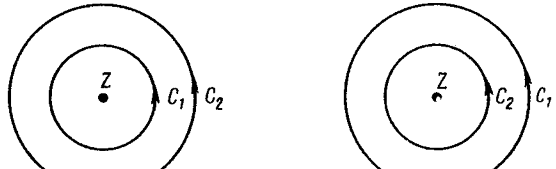


Рис. 6. Упорядочение операторов L_n, L_m определяется упорядочением контуров интегрирования

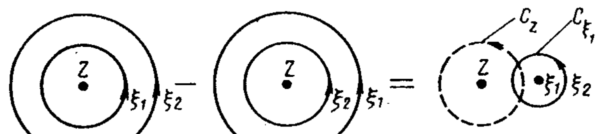


Рис. 7. Выражение через контурные интегралы для $(L_n L_m - L_m L_n)$

Аномальным здесь является первый член (сравните с формулой (2.31)). Заметим, что если корреляционная функция в левой части тождества (3.19) не содержит ни одного оператора $\Phi_k(z_k)$, мы получим

$$\langle T(z)\, T(z') \rangle = \frac{c/2}{(z-z')^4} \qquad (3.20)$$

(средние от всех операторов $\langle T \rangle$, $\langle \Phi_k \rangle$ равны нулю; в частности, это следует из условия ортогональности (2.11)). Мы видим, что аномальный член в формуле (3.19) обязан своим появлением отличной от нуля корреляционной функции (3.20).

Напомним также, что правую часть обычного тождества (2.31) мы получили, исходя из функции $\langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle$ и используя закон преобразования операторов Φ_k

$$\delta \Phi_\Delta = (\Delta \cdot \alpha'(z) + \alpha(z) \partial_z)\, \Phi_\Delta(z)$$

(см. формулы (2.29), (2.30)). Легко проверить, что если теперь мы будем исходить из функции $\langle T(z')\Phi_1(z_1)\ldots\rangle$, то получим тождество (3.I9). в том случае если $T(z')$ преобразуется при конформных преобразованиях следующим образом:

$$\delta T(z') = (2\alpha'(z') + \alpha(z')\partial_{z'})T(z') + \frac{c}{12}\alpha'''(z'). \qquad (3.21)$$

Таким образом, отличная от нуля корреляционная функция $\langle T(z)T(z')\rangle$ (3.20) показывает, что закон конформных преобразований оператора $T(z)$ отличается от закона преобразования основных конформных операторов $\Phi_k(z)$. Отличие состоит в аномальном члене $\frac{c}{12}\alpha'''(z)$ в формуле (3.2I), который, кстати, является единственно возможным членом по размерности операторов в формуле (3.2I), который можно добавить в вариацию $\delta T(z)$.

Вернемся к вычислению интеграла в формуле (3.I8). Подставим под интеграл операторное разложение для $T(\xi_2)T(\xi_1)$, которое следует из формулы (3.I9),

$$T(\xi_2)T(\xi_1) = \frac{c/2}{(\xi_2-\xi_1)^4} + \frac{2}{(\xi_2-\xi_1)^2}T(\xi_1) + \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\partial_{\xi_1}T(\xi_1) + \text{регулярные члены} \qquad (3.22)$$

После этого интеграл по контуру C_{ξ_1} может быть вычислен. Мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi_1 \Big[(\xi_1 - z)^{m+n-1}\cdot\frac{c}{12}n(n^2-1)\Phi(z) + (\xi_1-z)^{m+n+1}\cdot 2(n+1)T(\xi_1)\Phi(z) + (\xi_1-z)^{m+n+2}\partial_{\xi_1}T(\xi_1)\Phi(z)\Big]. \qquad (3.23)$$

Выполнив простые преобразования, находим

$$\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}\Phi(z) + \frac{n-m}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi_1(\xi_1-z)^{n+m-1}T(\xi_1)\Phi(z) = \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}\Phi(z) + (n-m)L_{n+m}\Phi(z). \qquad (3.24)$$

Окончательно имеем

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}. \qquad (3.25)$$

Операторы L_n (с отрицательным n) возникли выше из операторного разложения для $T(z)\Phi(z_1)$. С другой стороны, операторы $L_n(0)$ с положительными n являются генераторами конформных преобразований, соответствующих отдельным степеням z^{n+1} в разложении функции $\alpha(z)$

(I.I6). Действительно, запишем определение $L_n(z)\Phi(z)$ (3.I5) для $L_n(0)\Phi(z)$. Мы получим

$$L_n(0)\Phi_\Delta(z) \equiv L_n\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_z} d\xi\, \xi^{n+1}\, T(\xi)\Phi_\Delta(z). \qquad (3.26)$$

Здесь контур C_z по-прежнему охватывает точку z. В этом интеграле мы можем воспользоваться операторным разложением для $T(\xi)\Phi(z)$ (3.I), после чего интеграл легко вычисляется и мы получаем

$$L_n\Phi_\Delta(z) = [(n+1)z^n\Delta + z^{n+1}\partial_z]\Phi_\Delta(z). \qquad (3.27)$$

Это выражение есть обычная вариация оператора

$$\delta\Phi(z) = (\Delta\cdot\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\Phi_\Delta(z) \qquad (3.28)$$

при конформном преобразовании с функцией

$$\alpha_n(z) = a_n z^{n+1}. \qquad (3.29)$$

Алгебра (3.25) первоначально была открыта [I8] при изучении дуальных амплитуд или дуальных струн (см., например, работу [I9]), где также возникает двумерная конформная теория. Однако в дуальной теории [I9] изучался лишь частный случай алгебры (3.25), имеющий "центральный заряд алгебры" $C = I$. Как мы увидим в дальнейшем, с точки зрения собственно двумерной конформной теории [I0], этот случай тривиален. Он сводится к теории свободного поля.

Представления алгебры (3.25) с произвольным C (пространство "состояний" вида (3.I0), порождаемое алгеброй (3.25)) были детально изучены в математике [20, 2I].

4. Вырожденные конформные теории. Их реализация в статистической физике

В предыдущем разделе мы получили серию операторов-потомков (3.I0), растущих над каждым из основных конформных операторов Φ_k под действием операторов L_n алгебры Вирасоро (3.25) (рис. 8). Операторы (3.I0) с фиксированным N называются операторами N-го уровня [I0]. Все они имеют конформную размерность $\Delta + N$. Естественный вопрос - все ли операторы N-го уровня являются независимыми? Ниже мы придем к так называемым вырожденным конформным теориям [I0], которые имеют вырождение, т.е. линейную зависимость среди операторов вида (3.I0) для всех своих основных операторов Φ_k. Позже будут приведены аргументы в пользу того, что класс вырожденных теорий описывает фактически все возможные теории с обычными свойствами. В частности, такие теории описывают критические флуктуации в статистической физике.

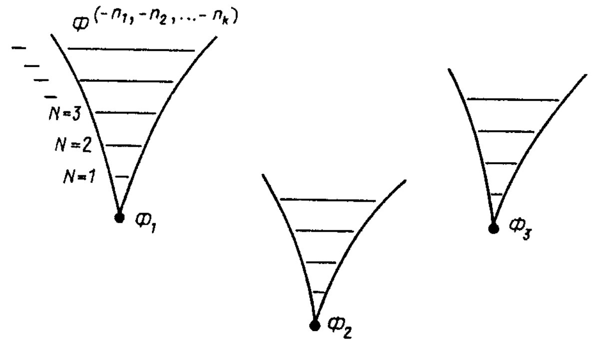


Рис. 8. Серия операторов-потомков (см. формулу (3.10))

К вырожденным конформным теориям можно подойти с несколько другой стороны. В начале второго раздела мы получили ограничения на корреляционные функции, которые следуют из малой конформной группы (система уравнений (2.9)). В двумерной теории малая конформная группа (проективная группа) порождается алгеброй генераторов L_{-1}, L_0, L_{+1} (см., например, работу [19]). В двух измерениях мы имеем "большую" алгебру всех операторов $\{L_n\}$ – алгебру Вирассоро (3.25). Естественно попытаться воспользоваться этими операторами, чтобы получить новые ограничения на корреляционные функции в дополнение к уравнениям (2.9).

Таким образом, мы зададимся целью построить из $\{L_n\}$ операторы, которые можно использовать в качестве новых ограничителей на теорию. Такой подход к построению теории известен как программа "зашнуровки" ("boot strap programm"). Для конформно-инвариантных операторных теорий она была сформулирована Поляковым [4].

Операторы $L_n = L_n(z_1)$ с положительным n зануляют операторы $\Phi_\Delta(z_1)$ (см. формулу (3.5)). Фактически формулу (3.5) можно рассматривать как условие конформной инвариантности оператора $\Phi_\Delta(z_1)$.

Операторы с отрицательными n порождают новые операторы (3.10). На первом уровне ($N = 1$, см. формулу (3.10)) есть один оператор L_{-1}. Условие $L_{-1}\Phi = \partial_z \Phi = 0$ (см. формулу (3.7)) дает лишь $\Phi = const$.

На втором уровне есть два оператора $L_{-1}^2 = L_{-1}L_{-1}$ и L_{-2}, из которых мы можем образовать линейную комбинацию

$$L_{-2} + a L_{-1}^2 . \tag{4.1}$$

Применив ее к оператору Φ_Δ, мы можем наложить условие на этот оператор

$$(L_{-2} + a L_{-1}^2)\Phi_\Delta = 0 . \tag{4.2}$$

Однако это условие должно быть согласовано с условием конформной инвариантности. Мы можем занулить лишь конформно-инвариантный оператор. Поэтому прежде мы должны обеспечить конформную инвариантность оператора $(L_{-2}+aL_{-1}^2)\Phi_\Delta$. Это означает (сравните с формулой (3.5)):

$$L_n(L_{-2} + a L_{-1}^2)\Phi_\Delta = 0 , \quad n>0 . \tag{4.3}$$

Достаточно удовлетворить лишь двум условиям:

$$L_{+1}(L_{-2} + a L_{-1})\Phi_\Delta = 0 ; \tag{4.4}$$

$$L_{+2}(L_{-2} + a L_{-1})\Phi_\Delta = 0 , \tag{4.5}$$

так как операторы $L_{+3}, L_{+4}, \ldots$ могут быть образованы коммутацией L_{+1}, L_{+2} (см. формулу (3.25)).

Пользуясь алгеброй (3.25) и конформными свойствами оператора Φ_Δ (формулы (3.5), (3.6)), из условия (4.4) легко получить

$$(3 + 2a(1 + 2\Delta))\, L_{-1}\Phi_\Delta = 0 \tag{4.6}$$

или

$$a = -\frac{3}{2(2\Delta+1)} , \tag{4.7}$$

если $L_{-1}\Phi_\Delta = \partial_z\Phi_\Delta \neq 0$. Из условия (4.5) таким же образом получаем

$$\left(4\Delta + \frac{c}{2} + 6a\cdot\Delta\right)\Phi_\Delta = 0 \tag{4.8}$$

или, с учетом формулы (4.7) [10],

$$c = \frac{2\Delta(5-8\Delta)}{2\Delta+1} . \tag{4.9}$$

Здесь c – центральный заряд алгебры Вирассоро (3.25), параметр конформной теории. При заданном c уравнение (4.9) имеет два решения для Δ. Обозначим их, по причине, которая станет ясной позже, через

$$\Delta_{1,2} \quad \text{и} \quad \Delta_{2,1} \tag{4.10}$$

и соответствующие операторы обозначим через

$$\Phi_{1,2} \equiv \Phi_{\Delta_{1,2}} \quad \text{и} \quad \Phi_{2,1} \equiv \Phi_{\Delta_{2,1}} . \tag{4.11}$$

Теперь на операторы $\Phi_{1,2}$ и $\Phi_{2,1}$ мы можем наложить условие

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)} L_{-1}^2 \right) \Phi_\Delta = 0, \qquad (4.12)$$

не нарушая конформной инвариантности. При этом возможная размерность оператора Φ_Δ фиксирована двумя значениями (4.10).

Мы сразу же продемонстрируем пользу от условия (4.12), кроме уже того, что размерность оператора становится определенной. Рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \dots \rangle , \qquad (4.13)$$

где $\Phi_\Delta(z)$ есть один из операторов $\Phi_{1,2}$ либо $\Phi_{2,1}$. Тогда, согласно условию (4.12), мы имеем

$$\left\langle \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)} L_{-1}^2 \right) \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \dots \right\rangle = 0 . \qquad (4.14)$$

Здесь оператор L_{-1}^2 является дифференциальным

$$L_{-1}^2 \Phi_\Delta = \partial_z^2 \Phi_\Delta , \qquad (4.15)$$

(см. формулу (3.7)). Преобразуем L_{-2} также в дифференциальный оператор. Имеем, согласно формуле (3.15),

$$\langle L_{-2} \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi (\xi - z)^{-1} \langle T(\xi) \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle . \qquad (4.16)$$

Контур C_z обозначен на левом рис. 9 вместе с другими точками корреляционной функции.

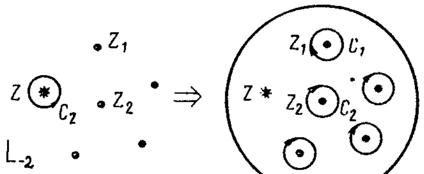


Рис. 9. Преобразование оператора L_{-2} в дифференциальный оператор

В интеграле (4.16) мы можем снять контур C_z с точки z и деформировать его в систему контуров на правом рис. 9. Тогда контур на бесконечности C_∞ дает нулевой вклад, так как асимптотика корреляционной функции под интегралом имеет вид

$$\langle T(\xi) \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle_{\xi \to \infty} \sim \langle T(\xi) T(0) \rangle \sim \frac{1}{\xi^4} \qquad (4.17)$$

и остаются лишь интегралы по маленьким контурам вокруг точек z_1, z_2, ... (см. рис. 9)

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1,2\dots} \oint_{C_i} d\xi (\xi - z)^{-1} \langle T(\xi) \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \dots \rangle \qquad (4.18)$$

Рассмотрим один из членов в этой сумме, например, интеграл вокруг точки z_1

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\xi (\xi - z)^{-1} \langle T(\xi) \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) . \qquad (4.19)$$

Здесь достаточно заменить произведение $T(\xi)\Phi_1(z_1)$ его операторным разложением

$$T(\xi)\Phi_1(z_1) = \frac{\Delta_1}{(\xi - z_1)^2} \Phi_1(z_1) + \frac{1}{\xi - z_1} \partial_1 \Phi_1(z_1) + \text{регулярные члены} \qquad (4.20)$$

После этого интеграл (4.19) вычисляется и мы получаем

$$\left(\frac{\Delta_1}{(z_1 - z)^2} - \frac{1}{z_1 - z} \partial_1 \right) \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \dots \rangle . \qquad (4.21)$$

Таким же образом вычисляются остальные интегралы в формуле (4.18). В результате из формулы (4.16) получаем

$$\langle L_{-2} \Phi(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle = \sum_{i=1,2,\dots} \left[\frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right] \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle . \qquad (4.22)$$

Окончательно из формулы (4.14) с учетом формул (4.15) и (4.22) мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка на корреляционную функцию (4.13) [10]

$$\frac{3}{2(2\Delta+1)} \partial_z^2 \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle = \sum_{i=1,2,\dots} \left[\frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right] \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \rangle . \qquad (4.23)$$

Это второй нетривиальный результат после уравнения (4.9) на конформную размерность Δ.

Заметим, что для оператора $\Phi_\Delta = \Phi_{1,2}$ или $\Phi_{2,1}$ семейство операторов (3.10) является вырожденным на втором уровне (см. обсуждения в начале этого раздела). Вырождение очевидно из условия (4.12).

Далее, на третьем уровне мы имеем операторы

$$L_{-1}^3, \quad L_{-2}L_{-1}, \quad L_{-3}. \tag{4.24}$$

Аналогично соотношениям (4.3)-(4.5), но уже для другого оператора Φ_Δ требуем выполнения условий конформной инвариантности линейной комбинации

$$(L_{-3} + a L_{-2}L_{-1} + b L_{-1}^3)\,\Phi(z). \tag{4.25}$$

Имеем

$$L_{+1}(L_{-3} + a L_{-2}L_{-1} + b L_{-1}^3)\,\Phi_\Delta = 0; \tag{4.26}$$

$$L_{+2}(L_{-3} + a L_{-2}L_{-1} + b L_{-1}^3)\,\Phi_\Delta = 0. \tag{4.27}$$

Первое уравнение определяет коэффициенты

$$a = -\frac{2}{\Delta}; \quad b = \frac{1}{\Delta(1+\Delta)}. \tag{4.28}$$

Второе устанавливает связь между Δ и C

$$C = \frac{-3\Delta^2 + 7\Delta - 2}{1+\Delta}. \tag{4.29}$$

Это уравнение снова имеет два решения

$$\Delta_{1,3} \quad \text{и} \quad \Delta_{3,1} \tag{4.30}$$

и соответственно имеется два оператора

$$\Phi_{1,3} \equiv \Phi_{\Delta_{1,3}} \quad \text{и} \quad \Phi_{3,1} \equiv \Phi_{\Delta_{3,1}}. \tag{4.31}$$

Аналогично на эти операторы мы накладываем условие конформной "зашнуровки"

$$\left(L_{-3} - \frac{2}{\Delta} L_{-2}L_{-1} + \frac{1}{\Delta(1+\Delta)} L_{-1}^3\right)\Phi_\Delta = 0, \tag{4.32}$$

чем определяем еще два конформных оператора для нашей теории. Их семейство (3.10) (конформный модуль оператора Φ_Δ, в терминологии [21]) является вырожденным на третьем уровне (см. формулу (4.32)).

Тем же методом, что и для операторов $\Phi_{1,2}, \Phi_{2,1}$, подчиняющихся условию (4.12), нетрудно получить, использовав условие (4.32), дифференциальное уравнение на корреляционные функции операторов $\Phi_{1,3}$, $\Phi_{3,1}$ [10]

$$\left\langle \left(L_{-3} - \frac{2}{\Delta} L_{-2}L_{-1} + \frac{1}{\Delta(1+\Delta)} L_{-1}^3\right)\Phi_\Delta(z)\Phi_1\Phi_2\ldots\right\rangle = 0;$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1+\Delta}\,\partial_z^3\langle\Phi_\Delta(z)\Phi_1\Phi_2\ldots\rangle = \Big\{\Delta\sum_i\Big[\frac{2\Delta_i}{(z-z_i)^3} + \frac{1}{(z-z_i)^2}\partial_i\Big] +$$

$$+ 2\sum_i\Big[\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\partial_i\Big]\partial_z\Big\}\langle\Phi_\Delta(z)\Phi_1\Phi_2\ldots\rangle. \tag{4.33}$$

Здесь $\Phi_\Delta(z) = \Phi_{1,3}$ или $\Phi_{3,1}$ и соответственно $\Delta = \Delta_{1,3}$ или $\Delta_{3,1}$; $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ – произвольные конформные операторы с размерностями $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$

Перейдем к описанию общей ситуации. Ту же программу мы можем провести в принципе для любого уровня N

$$\Big\{L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}\Phi_\Delta, \quad \sum n_i = N\Big\}. \tag{4.34}$$

Мы можем построить линейную комбинацию

$$\chi_{(N)} = \sum_{\{\vec{n}\},\, \sum n_i = N} b_{(-n_1,\ldots,-n_k)} L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}\Phi_\Delta, \tag{4.35}$$

потребовать ее конформности

$$L_n\chi_{(N)} = 0; \quad n > 0. \tag{4.36}$$

И затем, найдя коэффициенты $b_{(-n_1,\ldots-n_k)}$ и размерность $\Delta_{(N)} = \Delta_{(N)}(C)$ оператора Φ_Δ, наложить условие на оператор Φ_Δ

$$\chi_{(N)} = \sum_{\{\vec{n}\}} b_{(-n_1,\ldots,-n_k)} L_{-n_1}\ldots L_{-n_k}\Phi_\Delta = 0. \tag{4.37}$$

Условие (4.37) снова означает вырождение операторов (3.10) на N-м уровне.

По другому задачу о вырождении, т.е. о равных нулю линейных комбинациях вида (4.35), можно поставить следующим образом.

Введем обозначение для "состояний", порождаемых операторами L_{-n} из "вакуума" ("вакуума" алгебры Вирасоро (3.25)) – оператора Φ_Δ

$$\Phi_\Delta = |\Delta\rangle \text{ – "Вакуум"}; \tag{4.38}$$

$$L_{-n_1}\ldots L_{-n_k}\Phi_\Delta = L_{-n_1}\ldots L_{-n_k}|\Delta\rangle \text{ – "Возбуждения"}. \tag{4.39}$$

Очевидно, имеем свойства

$$L_n |\Delta\rangle = 0; \quad n>0; \tag{4.40}$$

$$L_0 |\Delta\rangle = \Delta |\Delta\rangle, \tag{4.41}$$

(см. формулы (3.5), (3.6)). Т.е. вакуум "уничтожается" всеми операторами L_n, $n>0$, а для L_0 он является собственным состоянием.

Далее, введем формально сопряженные состояния

$$\langle \Delta | ; \tag{4.42}$$

$$\langle \Delta | L_{n_k} \dots L_{n_1} . \tag{4.43}$$

Для них имеем, соответственно

$$\langle \Delta | L_{-n} = 0, \quad n>0; \tag{4.44}$$

$$\langle \Delta | L_0 = \Delta \langle \Delta | . \tag{4.45}$$

Теперь мы можем рассмотреть "состояния" N-го уровня

$$\{ L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle, \; n_1 \geqslant \dots \geqslant n_k, \; \sum n_i = N \}; \tag{4.46}$$

$$L_0 L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle = (\Delta + N) L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle \tag{4.47}$$

и определить для них матрицу норм

$$\hat{M}^{(N)}_{\{\vec{m}\}\{\vec{n}\}} = \langle \Delta | L_{m_\ell} \dots L_{m_1} \cdot L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle ;$$

$$n_1 \geqslant \dots \geqslant n_k ; \; m_1 \geqslant \dots \geqslant m_\ell ; \; \sum n_i = \sum m_i = N. \tag{4.48}$$

Матрица $\hat{M}$ зависит, очевидно, от двух параметров Δ и C. Разумеется, ее вид зависит также от номера уровня N.

Теперь заметим, что вырождения вида (4.37) отвечают обращению в нуль детерминанта матрицы $\hat{M}$. Таким образом, условие вырождения на N-м уровне есть

$$\mathrm{Det}\, \hat{M}^{(N)}(\Delta, C) = 0. \tag{4.49}$$

Очевидно также, что состояние $\chi_{(N)}$(4.35), удовлетворяющие условию (4.36), имеют нулевую норму в смысле определения (4.48).

Справедливо и обратное. Можно показать, что состояния алгебры Вирассоро с нулевой нормой ("нуль-векторы" [10, 21]) ортогональны в смысле нормы (4.48) ко всем остальным состояниям. Откуда следует, что нуль-векторы являются конформными операторами, т.е. удовлетворяют

условию (4.36). А тогда мы можем положить их равными нулю и получить в результате новые ограничительные условия на нашу теорию, на ее корреляционные функции [10].

Таким образом, задача о построении новых условий типа (4.12), (4.32) и отыскании новых конформных операторов для нашей теории, операторов типа $\Phi_{1,2}, \Phi_{2,1}, \Phi_{1,3}, \Phi_{3,1}$ (4.11), (4.31), сводится к отысканию нуль-векторов алгебры Вирассоро в смысле норм (4.48). При этом нули детермината матрицы $\hat{M}$, как функции Δ (уравнение (4.49)), дают значения конформных размерностей соответствующих операторов Φ_Δ аналогично уравнениям (4.9) и (4.29) для второго и третьего уровней.

Мы будем называть такие базисные операторы Φ_Δ, которые определяются из условий N-го уровня, вырожденными конформными операторами, имея в виду, что пространство операторов алгебры Вирассоро (3.10), построенное над этими основными операторами, вырождено на N-м уровне.

Сами нуль-векторы, т.е. линейные комбинации (4.35), могут быть найдены из условий (4.36), аналогично формулам (4.4), (4.5) и (4.26), (4.27). Из этих линейных комбинаций следуют затем дифференциальные уравнения на корреляционные функции [10] (см. уравнения (4.23) и (4.33)).

Детерминант $\mathrm{Det}\, \hat{M}^{(N)}$(4.49) был вычислен Кацем [20] (см. также работу [21]). Поэтому для размерностей вырожденных конформных операторов может быть написана явная формула. Детерминант N-го уровня имеет вид [20]

$$\mathrm{Det}^2\, \hat{M}^{(N)}(\Delta, C) = \mathrm{const} \prod_{\ell=1}^{N} \prod_{n,m(n\times m=\ell)} (\gamma_{n,m}(\Delta, C))^{P(N-\ell)}, \tag{4.50}$$

где n, m – все возможные пары целых чисел, на которые можно разбить число ℓ; $P(N)$ – число операторов (3.10),

$$\gamma_{n,m}(\Delta, C) = \left(\Delta + \frac{(n^2-1)(C-13)}{24} + \frac{nm-1}{2}\right) \times$$
$$\times \left(\Delta + \frac{(m^2-1)(C-13)}{24} + \frac{nm-1}{2}\right) + \frac{(n^2-m^2)^2}{16}. \tag{4.51}$$

Эта формула была найдена Кацем [20]. Ее доказательство см. в работе [21].

Корни уравнения $\gamma_{n,m} = 0$ имеют вид

$$\Delta_{n,m} = \frac{(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4}, \tag{4.52}$$

где

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}; \quad C = 1 - 24\alpha_0^2. \tag{4.53}$$

Обозначим соответствующие вырожденные операторы

$$\Phi_{n,m} \equiv \Phi_{\Delta_{n,m}} . \qquad (4.54)$$

Из сказанного выше следует, что корреляционные функции операторов $\Phi_{n,m}$ удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям N-го порядка, $N = n \times m$.

Операторную алгебру (I.2) для операторов $\Phi_{n,m}$ можно исследовать с помощью соответствующих дифференциальных уравнений (см. работу [I0]). (Исследование сводится к решению характеристических уравнений на степенные особенности вида $(z - z')^{\delta}$ в корреляционных функциях для этих операторов.) При этом оказывается, что конформная теория, построенная из операторов $\Phi_{n,m}$, является замкнутой. Т.е. из произведений вырожденных операторов (4.54) возникают в правой части (I.2) операторы из этого же семейства [I0].

Таким образом, в результате мы имеем конформные теории с одним независимым параметром C (центральный заряд алгебры Вирассоро (3.25)), в которых известен весь (дискретный) спектр операторов $\Phi_{n,m}$ и их размерностей $\Delta_{n,m}$. Их корреляционные функции являются решениями линейных дифференциальных уравнений и могут в принципе все быть вычислены. Из корреляционных функций будет следовать операторная алгебра (I.2). Эти теории являются, таким образом, точно решаемыми.

В следующих разделах мы опишем технику явного вычисления корреляционных функций для конформных теорий, описанных выше. При этом будет использоваться несколько иная формулировка конформной теории по сравнению с той, которой мы следовали выше. Будут также явно вычислены структурные коэффициенты C^{p}_{nk} операторной алгебры (I.2).

Этот раздел мы закончим рядом замечаний относительно физического смысла построенных выше конформных теорий, а также их некоторых дополнительных свойств.

В статистической физике в последние годы был получен ряд формул для критических индексов для нескольких серий двумерных статистических моделей (см. работы [22–29] и ссылки в этих работах). Первой из этих серий, в которой были найдены формулы для индексов, является q-компонентная модель Поттса $q = 2, 3, 4, 5, \ldots$ [30] (см. также работу [3I]). Эта серия моделей обобщает двумерную модель Изинга. Спиновые переменные в этих моделях, определенные в узлах двумерной решетки и имеющие взаимодействие только между ближайшими соседями, принимают q различных значений, в отличие от модели Изинга, где спин σ принимает два значения, например ± 1. Специальный класс этих моделей, у которых к тому же энергия взаимодействия ближайших соседей

$$H = -\sum_{x,x'} V(\sigma_x, \sigma_{x'}) \; ; \; x, x' \text{ - узлы решетки}, \qquad (4.55)$$

инвариантна по отношению ко всей группе перестановок в спиновом пространстве, называется собственно моделью Поттса. Нетрудно убедиться, что энергия $V(\sigma, \sigma')$ должна при этом иметь вид

$$V(\sigma,\sigma') = J\cdot(1-\delta_{\sigma,\sigma'}); \quad \delta_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1, & \sigma = \sigma'; \\ 0, & \sigma \neq \sigma'. \end{cases} \qquad (4.56)$$

Точное решение для этих моделей не найдено, за исключением модели Изинга, $q = 2$. Известно однако, что при $q > 4$ эта модель имеет фазовый переход первого рода [32], и соответственно непрерывного предела для таких моделей нет. В моделях с $q \leqslant 4$ имеется точка фазового перехода второго рода [32]. В окрестности этой точки должна существовать непрерывная теория поля. В обычном смысле это оставляет лишь модели с $q = 2, 3, 4$. Однако существует обобщение модели Поттса на случай непрерывного "числа компонентов" q [33, 34]. Эти модели имеют ряд физических приложений. Например, предел $q \to 1$ описывает статистику полимерных нитей. Модели с каноническими значениями $q = 2, 3, 4$ описывают, разумеется, фазовый переход в реальных поверхностных и слоистых системах. Другие приложения см., например, в работе [3I].

Несмотря на отсутствие точного решения на решетке для этой модели были найдены точные формулы для критических индексов, отвечающих непрерывной теории в точке фазового перехода. При этом критические индексы оказываются непрерывными функциями параметра $q \leqslant 4$. Например, оператор энергии $\mathcal{E}$, который канонически связан с температурой T, для q-компонентной модели Поттса имеет размерность [22, 26]

$$\Delta_{\mathcal{E}} \equiv X_{T_1} = \frac{1+y}{2-y} . \qquad (4.57)$$

Здесь параметр y связан с q соотношением

$$q = 4 \cos^2 \frac{\pi y}{2} . \qquad (4.58)$$

Известна также размерность второго "температурного" оператора, который возникает из операторного произведения двух операторов энергии $\mathcal{E}\mathcal{E} \to \mathcal{E}_2$

$$\Delta_{\mathcal{E}_2} \equiv X_{T_2} = \frac{4+2y}{2-y} . \qquad (4.59)$$

Для спинового оператора σ, первого "магнитного оператора" и для второго "магнитного оператора", который возникает из произведения $\sigma\mathcal{E} \to \sigma_2$, были найдены следующие формулы [23, 24, 27]:

$$\Delta_\sigma = X_{H_1} = \frac{1-y^2}{4(2-y)}; \qquad (4.60)$$

$$\Delta_{\sigma_2} \equiv X_{H_2} = \frac{9-y^2}{4(2-y)}. \qquad (4.61)$$

До возникновения двумерной конформной теории были известны, кроме того, аналогичные формулы для модели $O(n)$, $n \leqslant 2$, которая также определяется для непрерывного "числа компонентов" n и имеет при $n \leqslant 2$ точку фазового перехода второго рода. При $n = 2$ – это модель планарного магнетика (модель XY). Точка $n = 1$ соответствует модели Изинга. Для этой модели были найдены следующие формулы [25, 28]:

$$\Delta_\varepsilon = 1-y, \quad \Delta_{\varepsilon_2} = 4-3y; \qquad (4.62)$$

$$\Delta_\sigma = \frac{1-y^2}{2(2-y)}. \qquad (4.63)$$

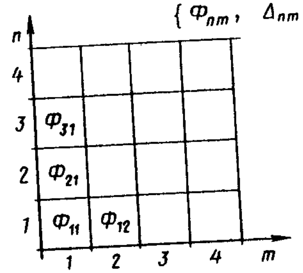
Здесь

$$n = 2\cos\frac{\pi y}{2-y}. \qquad (4.64)$$

Оказалось, что все приведенные выше формулы для индексов модели Поттса и модели $O(n)$ следуют из единой формулы конформной теории для размерностей $\Delta_{n,m}$ вырожденных конформных операторов $\Phi_{n,m}$, т.е. формулы Каца (4.52) [11, 12]. При этом, например, оператором энергии $\mathcal{E}$ для модели Поттса и модели $O(n)$ оказываются соответственно операторы $\Phi_{1,2}$ и $\Phi_{2,1}$ в классификации конформной теории. Параметром конформной теории является центральный заряд C алгебры Вирассоро. Для серии моделей Поттса и моделей $O(n)$ он оказывается однозначно связанным с параметрами $q \leqslant 4$ и $n \leqslant 2$ соответственно и при этом $C \leqslant 1$ (см. работы [11, 12]).

Для серии так называемых трикритических моделей Поттса (см. работу [26]) идентификация физических операторов с операторами конформной теории была найдена в работе [35] для моделей $q = 2$ и 3, и продолжение на всю параметрическую серию непрерывного $q \leqslant 4$ в работе [12]. В этих моделях оператором энергии является конформный оператор $\Phi_{2,1}$ (рис. 10). Идентификацию операторов спина и других операторов для этих моделей см. в работах [11, 12].

В недавней работе Андруса, Бакстера и Форрестера [36] была найдена и решена новая бесконечная серия двумерных решеточных моделей (модели RSOS, Restricted Solid on Solid models). Были вычислены критические индексы для оператора энергии и всех параметров порядка. Весьма простой анализ этих моделей и их параметров порядка см. в работе [37]. Как показано в работе [37], индексы этих моделей также вкладываются в спектр размерностей конформной теории (4.52). Для этой серии оператором энергии является оператор $\Phi_{3,1}$, параметрами порядка являются операторы $\Phi_{n,n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$



$\{\Phi_{nm},\ \Delta_{nm},\quad n, m = 1, 2, 3, \ldots\}$

$\Phi_{12} \sim \varepsilon$, *модель Поттса*

$\Phi_{21} \sim \varepsilon$, *трикритическая модель Поттса*

$\Phi_{31} \sim \varepsilon$, *модель $O(n)$*

$\Phi_{11} = I \equiv 1, \qquad \Delta_{11} = 0$

Рис. 10. Серия моделей Поттса и модели $O(n)$

Таким образом, фактически все известные критические индексы двумерной статистической теории вкладываются в спектр размерностей конформной теории. Предсказывается также большое количество новых.

В качестве примера на рис. 11 и 12 приведены конформные таблички (спектр операторов и их размерностей) для двух относительно простых моделей – модели Изинга и модели Z_3. Соответственно это двух- и трехкомпонентная модель Поттса.

Кроме свойств вырожденных конформных теорий, описанных выше в этом разделе, оказывается также, что имеется дискретная серия теорий, отвечающая дискретным значениям параметра C (или параметра в формуле (4.53)), при которых спектр операторов $\Phi_{n,m}$ замыкается конечным числом таких операторов [10]. Такие теории называются минимальными [10]. Их спектр представляется конечными табличками. Конформные теории модели Изинга [10] и модели Z_3 [11] являются одними из простейших среди минимальных теорий.

Минимальные теории возникают, вообще говоря, при всех рациональных значениях параметра α_-^2 [10]

$$\alpha_-^2 = p/q. \qquad (4.65)$$

Здесь p и q – целые числа. Многие из них, однако, могут содержать паталогические операторы, имеющие отрицательные размерности $\Delta_{n,m}$. Главная серия таких теорий, для которой $q = p + 1$, не содержит никаких паталогий. Эта серия выделена также условием унитарности [35] (Заметим, однако, что не все статистические модели унитарны в смысле [35], см. работы [12, 16]).

Модель Изинга

ε	I
σ	σ
I	ε

$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{2}$

Рис. II. Модель Изинга

Модель Z_3

Y	X	ε	I
Z	σ	σ	Z
I	ε	X	Y

3	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
0	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	3

Рис. I2. Модель Z_3

Свойства минимальных конформных теорий, в частности, причина замыкания этих теорий конечным числом операторов, подробно обсуждаются в работе [I0]. Эти свойства следуют также из явных формул для коэффициентов операторной алгебры C^p_{kn} (I.2), которые будут получены в следующих разделах (см. также работы [I3, I4]).

Отметим в заключение этого раздела, что в этих лекциях мы ограничиваемся специальным классом конформных теорий, в которых нет дополнительных симметрий или, другими словами, нет дополнительного вырождения основных операторов Φ_Δ по размерностям Δ. Конформные теории с неабелевыми симметриями, в которых операторы Φ_Δ являются уже матрицами на группе симметрии, изучаются в работе [38].

5. Интегральное представление для аналитических функций конформной теории

В этом и следующем разделах мы опишем технику вычисления корреляционных функций и структурных коэффициентов операторной алгебры (I.2) для конформных теорий, описанных в предыдущем разделе. При этом в большей части мы будем следовать работе [I2].

Рассмотрим вначале простую конформную теорию, в которой операторы являются экспонентами свободного безмассового поля $\varphi(z,\bar z)$

$$\Phi_\Delta \sim V_\alpha(z,\bar z) = e^{i\alpha\varphi(z,\bar z)}. \qquad (5.1)$$

Действие для поля $\varphi(z,\bar z)$ имеет вид

$$A[\varphi] \sim \int dz\, d\bar z\; \partial_z \varphi\, \partial_{\bar z}\varphi \sim \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2. \qquad (5.2)$$

Корреляционные функции для такой теории легко вычисляются. Для двухточечной функции имеем

$$\langle V_\alpha(z,\bar z) V_{-\alpha}(z',\bar z')\rangle = \frac{\int D\varphi\, e^{i\alpha\varphi(z,\bar z)}\, e^{-i\alpha\varphi(z',\bar z') - A[\varphi]}}{\int D\varphi\, e^{-A[\varphi]}} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\left(2\langle\varphi^2\rangle - 2\langle\varphi(z,\bar z)\varphi(z',\bar z')\rangle\right)\right\} = \left(\frac{a}{|z-z'|}\right)^{4\alpha^2} \sim \frac{1}{|z-z'|^{4\alpha^2}}. \qquad (5.3)$$

Здесь мы использовали среднее для поля φ

$$\langle \varphi(z,\bar z)\varphi(z',\bar z')\rangle = 4\ln\frac{R}{|z-z'|}. \qquad (5.4)$$

Масштаб R есть обрезка на больших расстояниях. Он должен сократиться в окончательном выражении для корреляционной функции. В обратном случае функция будет равна нулю, так как подразумевается предел $R\to\infty$ (см. формулу (5.3)). Масштаб a в функции (5.3) есть обычная для квантовой теории поля обрезка на малых расстояниях. В статистической теории это масштаб порядка решеточного расстояния.

Подобным образом имеем, например, для четырехточечной функции

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1\bar z_1) V_{\alpha_2}(z_2\bar z_2) V_{\alpha_3}(z_3\bar z_3) V_{\alpha_4}(z_4\bar z_4)\rangle \sim \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j}, \quad \sum \alpha_i = 0. \qquad (5.5)$$

Так же, как и для общей конформной теории, описанной в предыдущих разделах, мы можем временно забыть о переменных $\bar z_i$ (см. раздел 2). Тогда имеем

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z)\rangle \sim \frac{1}{(z-z')^{2\alpha^2}}; \qquad (5.6)$$

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_4}(z_4)\rangle \sim \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2\alpha_i\alpha_j}, \quad \sum\alpha_i = 0. \qquad (5.7)$$

Из двухточечной функции (5.6) следует

$$\Delta_\alpha = \alpha^2. \qquad (5.8)$$

Тензор энергии-импульса $T(z)$ для этой теории имеет вид

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{4} : \partial_z\varphi\, \partial_z\varphi : \qquad (5.9)$$

"Нормальное упорядочение" в тензоре (5.9) означает на языке средних, если не вводить канонического квантования,

$$:\partial_z\varphi\partial_z\varphi: = \lim_{z,z'\to\frac{z+z'}{2}}\left\{\partial_z\varphi(z)\partial_{z'}\varphi(z') - \langle\partial_z\varphi(z)\partial_{z'}\varphi(z')\rangle\right\}. \qquad (5.10)$$

Подобным образом для экспоненциальных операторов $V_\alpha(z)$ сокращение расходимостей от малых расстояний, которые возникают при вычислении корреляционных функций, означает следующее определение для операторов:

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}: \sim e^{i\alpha\varphi(z) - \frac{\alpha^2}{2}\langle\varphi^2\rangle} \sim$$

$$\sim \frac{1}{a^{\alpha^2}}\exp(i\alpha\varphi(z)). \qquad (5.11)$$

Заметим отсюда, что размерность $\Delta = \alpha^2$ операторов $V_\alpha(z)$ (сравните с формулой (5.8)) имеет чисто квантовое происхождение.

Теперь мы обобщим описанную выше простую теорию. Введем вакуумный заряд $-2\alpha_0$, расположенный где-нибудь вдали от остальных точек в корреляционных функциях (рис. 13), и будем соответственно считать отличными от нуля корреляционные функции

$$\langle V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}\dots V_{\alpha_k}\rangle, \qquad (5.12)$$

для которых

$$\sum\alpha_i = 2\alpha_0 \qquad (5.13)$$

вместо $\sum\alpha_i = 0$ (см. формулу (5.7)). Фактически корреляционные функции в такой теории могут быть определены следующим образом:

$$\langle V_{\alpha_1}\dots V_{\alpha_k}\rangle_{(-2\alpha_0)} = \lim_{B\to\infty}\left\{B^{8\alpha_0^2}\langle V_{\alpha_1}\dots V_{\alpha_k}V_{-2\alpha_0}(B)\rangle_{(0)}\right\}. \qquad (5.14)$$

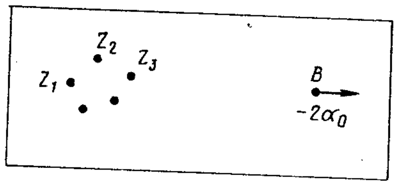


Рис. 13. Обобщение теории: $-2\alpha_0$ – вакуумный заряд вдали от точек в корреляционных функциях

Усреднение в правой части идет по обычному "зарядово нейтральному" вакууму $\sum\alpha_i - 2\alpha_0 = 0$. Для средних вида (5.14) возможна такая интерпретация, как амплитуда перехода между вакуумами канонической квантовой теории $|in\rangle$ и $\langle out|$, имеющими разные заряды α

$$\alpha_{in} = 0\ ;\ \alpha_{out} = -2\alpha_0.$$

В этой теории двухточечная корреляционная функция имеет вид

$$\langle V_\alpha(z)V_{2\alpha_0-\alpha}(z')\rangle \sim \frac{1}{(z-z')^{2\alpha(\alpha-2\alpha_0)}} \qquad (5.15)$$

(сравните с формулой (5.6)). Отсюда находим конформную размерность операторов, которая оказывается зависящей от вакуумного заряда α_0

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0. \qquad (5.16)$$

Тензор энергии импульса для теории свободного поля $\varphi(z)$ может, вообще говоря, иметь вид

$$T(z) = -\frac{1}{4}:\partial_z\varphi\partial_z\varphi: + A\partial_z^2\varphi. \qquad (5.17)$$

Коэффициент A определяется конформным тождеством Уорда (2.31), из которого следует операторное разложение

$$T(z)V(z') = \frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2}V_\alpha(z') + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}V_\alpha(z') + \dots \qquad (5.18)$$

(сравните с формулой (3.1)). В рассматриваемой теории разложение (5.18) может быть вычислено также независимо. Имеем

$$T(z)V_\alpha(z') = :\left(-\frac{1}{4}\partial_z\varphi\partial_z\varphi + A\partial_z^2\varphi\right)::e^{i\alpha\varphi(z')}: =$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2i\alpha A}{(z-z')^2}:e^{i\alpha\varphi(z)}: + \frac{i\alpha}{z-z'}:\partial_z\varphi(z)\,e^{i\alpha\varphi(z')}: +$$

$$+ :\left(-\frac{1}{4}\partial_z\varphi\partial_z\varphi + A\partial_z^2\varphi(z)\right)e^{i\alpha\varphi(z')}: =$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2i\alpha A}{(z-z')^2}V_\alpha(z') + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'}V_\alpha(z') + \text{регулярные члены} \qquad (5.19)$$

Здесь мы пользовались лишь средним для свободного поля φ

$$\langle\varphi(z)\varphi(z')\rangle = 2\ln\frac{R}{z-z'}. \qquad (5.20)$$

Из формул (5.19), (5.18) и (5.16) находим, что теория самосогласована при $A = i\alpha_0$. Таким образом, в теории с вакуумным зарядом имеем

$$T(z) = -\frac{1}{4}:\partial_z\varphi\partial_z\varphi: + i\alpha_0\partial_z^2\varphi(z). \qquad (5.21)$$

Установим также явный вид конформных преобразований операторов $V_\alpha(z)$. В обычной теории с $\alpha_0 = 0$ у свободного поля $\varphi(z)$ преобразуется лишь его аргумент ($\Delta_\varphi = 0$)

$$\varphi(z) \to \varphi(f(z)) \qquad \text{при} \quad z \to f(z). \tag{5.22}$$

Тогда для оператора $V_\alpha(z)$ получаем

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}: \sim \frac{1}{a^{\alpha^2}}\, e^{i\alpha\varphi(z)} \longrightarrow$$

$$\to (f'(z))^{\alpha^2} \frac{1}{a^{\alpha^2}}\, a^{i\alpha\varphi(f(z))} \sim (f'(z))^{\alpha^2} V_\alpha(f(z)) \tag{5.23}$$

(сравните с формулой (2.I6)). Масштабный фактор возникает из-за конформного преобразования масштаба обрезки a.

В теории с $\alpha_0 \neq 0$ закон преобразования операторов $V_\alpha(z)$ (2.I6) должен быть согласован с $\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$. Это достигается обобщением закона преобразования свободного поля $\varphi(z)$

$$\varphi(z) \to \varphi(z) + 2i\alpha_0 \ln f'(z) \approx$$

$$\approx \varphi(z) + \mathcal{E}(z)\,\partial_z \varphi(z) + 2i\alpha_0 \mathcal{E}'(z) \tag{5.24}$$

при $z \to f(z) = z + \mathcal{E}(z)$.

Тогда получаем

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}: \to (f'(z))^{\alpha^2} :\exp\{ i\alpha\varphi(f(z)) -$$

$$- 2\alpha\alpha_0 \ln f'(z)\}: = (f'(z))^{\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0} V_\alpha(f(z)) \tag{5.25}$$

в соответствии с формулами (2.I6) и (5.I6).

Мы можем вычислить теперь параметр C для нашей теории, т.е. центральный заряд алгебры Вирассоро (3.25). Согласно формуле (3.20), для этого достаточно найти корреляционную функцию $\langle T(z)T(z')\rangle$. Из выражений (5.20), (5.2I) легко получить

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^4} \cdot \frac{1-24\alpha_0^2}{2},$$

откуда следует

$$C = 1 - 24\,\alpha_0^2. \tag{5.26}$$

Таким образом, введя в теорию экспоненциальных операторов $V_\alpha(z)$ вакуумный заряд $-2\alpha_0$, мы получили в результате явное представление для конформной теории с общим значением C. Отметим, что теория с $C = I$, $\alpha_0 = 0$, которая была рассмотрена в начале этого раздела, является тривиальной и имеет корреляционные функции общего вида (5.5).

Теперь мы можем использовать построенное выше представление для вычисления корреляционных функций теории с $C < I$, $\alpha_0 \neq 0$.

Зададимся целью найти вначале функцию

$$\langle \Phi_\Delta(z_1)\Phi_\Delta(z_2)\Phi_\Delta(z_3)\Phi_\Delta(z_4)\rangle, \tag{5.27}$$

в которой все операторы имеют одинаковую размерность. Естественно ожидать, что такая корреляционная функция должна быть отличной от нуля.

Для теории с $\alpha_0 = 0$ имеется условие $\sum \alpha_i = 0$. Функцию с нужными свойствами, построенную из операторов $V_\alpha(t)$, легко найти. Имеем, например,

$$\langle V_\alpha(z_1)V_\alpha(z_2)V_{-\alpha}(z_3)V_{-\alpha}(z_4)\rangle =$$

$$= \left[\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right]^{2\alpha^2}. \tag{5.28}$$

Можно также взять для отдельных операторов симметричные комбинации вида

$$\Phi_\alpha = V_\alpha + V_{-\alpha}. \tag{5.29}$$

Выбор зависит от дополнительных свойств операторной алгебры конкретной теории.

В теории с $\alpha_0 \neq 0$ мы можем строить функцию (5.27) из операторов V_α и $V_{2\alpha_0-\alpha}$, имеющих одинаковую размерность (см. формулу (5.I6)). И одновременно должно быть выполнено условие

$$\sum \alpha_i = 2\alpha_0. \tag{5.30}$$

В противном случае, при определении (5.I4) корреляционная функция будет равна нулю.

Функции вида

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha} V_{2\alpha_0-\alpha}\rangle; \tag{5.3I}$$

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha}\rangle \tag{5.32}$$

равны нулю, так как $\sum \alpha_i \neq 2\alpha_0$. Таким образом, тривиальных функций, т.е. функций вида (5.7) или (5.28), в такой теории, вообще говоря, нет.

Новые, нетривиальные функции возникают при заполнении вакуума (точнее, заполнении амплитуды перехода вакуум - вакуум) "экранирующими" операторами вида

$$Q = \oint_C dz\, J(z). \tag{5.33}$$

Установим также явный вид конформных преобразований операторов $V_\alpha(z)$. В обычной теории с $\alpha_0 = 0$ у свободного поля $\varphi(z)$ преобразуется лишь его аргумент ($\Delta_\varphi = 0$)

$$\varphi(z) \to \varphi(f(z)) \qquad \text{при} \quad z \to f(z). \tag{5.22}$$

Тогда для оператора $V_\alpha(z)$ получаем

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}: \sim \frac{1}{a^{\alpha^2}} e^{i\alpha\varphi(z)} \longrightarrow$$

$$\to (f'(z))^{\alpha^2} \frac{1}{a^{\alpha^2}} a^{i\alpha\varphi(f(z))} \sim (f'(z))^{\alpha^2} V_\alpha(f(z)) \tag{5.23}$$

(сравните с формулой (2.16)). Масштабный фактор возникает из-за конформного преобразования масштаба обрезки a.

В теории с $\alpha_0 \neq 0$ закон преобразования операторов $V_\alpha(z)$ (2.16) должен быть согласован с $\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$. Это достигается обобщением закона преобразования свободного поля $\varphi(z)$

$$\varphi(z) \to \varphi(z) + 2i\alpha_0 \ln f'(z) \approx$$

$$\approx \varphi(z) + \varepsilon(z)\partial_z \varphi(z) + 2i\alpha_0 \varepsilon'(z) \tag{5.24}$$

при $z \to f(z) = z + \varepsilon(z)$.

Тогда получаем

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}: \to (f'(z))^{\alpha^2} :\exp\{i\alpha\varphi(f(z)) -$$

$$- 2\alpha\alpha_0 \ln f'(z)\}: = (f'(z))^{\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0} V_\alpha(f(z)) \tag{5.25}$$

в соответствии с формулами (2.16) и (5.16).

Мы можем вычислить теперь параметр C для нашей теории, т.е. центральный заряд алгебры Вирассоро (3.25). Согласно формуле (3.20), для этого достаточно найти корреляционную функцию $\langle T(z)T(z')\rangle$. Из выражений (5.20), (5.21) легко получить

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^4} \cdot \frac{1-24\alpha_0^2}{2},$$

откуда следует

$$C = 1 - 24\alpha_0^2. \tag{5.26}$$

Таким образом, введя в теорию экпоненциальных операторов $V_\alpha(z)$ вакуумный заряд $-2\alpha_0$, мы получили в результате явное представление для конформной теории с общим значением C. Отметим, что теория с $C = 1$, $\alpha_0 = 0$, которая была рассмотрена в начале этого раздела, является тривиальной и имеет корреляционные функции общего вида (5.5).

Теперь мы можем использовать построенное выше представление для вычисления корреляционных функций теории с $C < 1$, $\alpha_0 \neq 0$.

Зададимся целью найти вначале функцию

$$\langle \Phi_\Delta(z_1)\Phi_\Delta(z_2)\Phi_\Delta(z_3)\Phi_\Delta(z_4)\rangle, \tag{5.27}$$

в которой все операторы имеют одинаковую размерность. Естественно ожидать, что такая корреляционная функция должна быть отличной от нуля.

Для теории с $\alpha_0 = 0$ имеется условие $\sum \alpha_i = 0$. Функцию с нужными свойствами, построенную из операторов $V_\alpha(t)$, легко найти. Имеем, например,

$$\langle V_\alpha(z_1)V_\alpha(z_2)V_{-\alpha}(z_3)V_{-\alpha}(z_4)\rangle =$$

$$= \left[\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)(z_2-z_3)(z_1-z_4)}\right]^{2\alpha^2}. \tag{5.28}$$

Можно также взять для отдельных операторов симметричные комбинации вида

$$\Phi_\alpha = V_\alpha + V_{-\alpha}. \tag{5.29}$$

Выбор зависит от дополнительных свойств операторной алгебры конкретной теории.

В теории с $\alpha_0 \neq 0$ мы можем строить функцию (5.27) из операторов V_α и $V_{2\alpha_0-\alpha}$, имеющих одинаковую размерность (см. формулу (5.16)). И одновременно должно быть выполнено условие

$$\sum \alpha_i = 2\alpha_0. \tag{5.30}$$

В противном случае, при определении (5.14) корреляционная функция будет равна нулю.

Функции вида

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha} V_{2\alpha_0-\alpha}\rangle; \tag{5.31}$$

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha}\rangle \tag{5.32}$$

равны нулю, так как $\sum \alpha_i \neq 2\alpha_0$. Таким образом, тривиальных функций, т.е. функций вида (5.7) или (5.28), в такой теории, вообще говоря, нет.

Новые, нетривиальные функции возникают при заполнении вакуума (точнее, заполнении амплитуды перехода вакуум - вакуум) "экранирующими" операторами вида

$$Q = \oint_C dz\, J(z). \tag{5.33}$$

Здесь C – некий контур, который будет выбран позже. Оператор $J(z)$ должен иметь размерность $\Delta_J = 1$, чтобы в целом оператор Q не нарушил конформную инвариантность (точнее, не давал вообще никакого вклада в конформные преобразования корреляционных функций).

В теории с $\alpha_0 \neq 0$ имеется два таких оператора. Действительно, возьмем экспоненциальный оператор V_α и наложим условие $\Delta_\alpha = 1$. Тогда получим, согласно формуле (5.16),

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 = 1\,,$$
$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}\,. \tag{5.34}$$

Тем самым получаем два экранирующих оператора

$$Q_\pm = \oint_C dz\, J_\pm(z)\;;\quad J_\pm = V_{\alpha_\pm}. \tag{5.35}$$

Заметим, что из формул (5.34) следует

$$\alpha_+ + \alpha_- = 2\alpha_0\,. \tag{5.36}$$

Вернемся к функциям (5.31) и (5.32). Для первой функции полный заряд операторов равен $4\alpha_0$, и излишек заряда $2\alpha_0$ (см. условие (5.30)) операторами $J_\pm$ "заэкранирован" быть не может.

Для второй функции излишек заряда равен 2α. Он может быть заэкранирован только в том случае, если 2α кратно α_+, α_-, т.е.

$$2\alpha = -\tilde{n}\alpha_- - \tilde{m}\alpha_+\,;$$
$$\alpha = \alpha_{n,m} = -\frac{\tilde{n}}{2}\alpha_- - \frac{\tilde{m}}{2}\alpha_+ = \frac{1-n}{2}\alpha_- + \frac{1-m}{2}\alpha_+\,. \tag{5.37}$$

Сдвижка на единицу $\tilde{n} = n - 1$, $\tilde{m} = m - 1$ сделана для удобства в дальнейшем.

Таким образом, условие неравенства нулю функции (5.27) приводит к дискретным (квантованным) значениям параметра α (5.37). Соответственно имеем дискретный спектр операторов

$$V_{n,m}(z) = V_{\alpha_{n,m}}(z)\,;\quad V_{\overline{n,m}}(z) = V_{2\alpha_0 - \alpha_{n,m}} \tag{5.38}$$

с размерностями

$$\Delta_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 - 2\alpha_{n,m}\alpha_0 = \frac{(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2}{4}\,. \tag{5.39}$$

Последняя формула есть формула Каца (4.52). Тем самым мы снова пришли к вырожденным конформным теориям.

Возвращаясь к построению корреляционных функций, вспомним теперь, что до сих пор мы игнорировали их зависимость от сопряженных переменных $\bar{z}_i$. Поэтому функции, которые мы до сих пор обсуждали,

не являются в буквальном смысле корреляционными функциями. Полные корреляционные функции мы построим в следующем разделе, а пока приведем общий вид их z-зависимости.

Используя экранирующие операторы (5.35), взятые в нужном количестве, чтобы удовлетворить условию (5.30), получаем аналитические функции следующего вида:

$$\langle \Phi_{n,m}(z_1)\Phi_{n,m}(z_2)\Phi_{n,m}(z_3)\Phi_{n,m}(z_4)\rangle \sim$$
$$\sim \oint_{C_1} du_1 \ldots \oint_{C_{n-1}} du_{n-1} \oint_{S_1} d\vartheta_1 \ldots \oint_{S_{m-1}} d\vartheta_{m-1} \langle V_{\alpha_{n,m}}(z_1) V_{\alpha_{n,m}}(z_2) \times$$
$$\times V_{\alpha_{n,m}}(z_3) V_{2\alpha_0 - \alpha_{n,m}}(z_4) J_-(u_1)\ldots J_-(u_{n-1}) J_+(\vartheta_1)\ldots J_+(\vartheta_{m-1})\rangle =$$
$$= \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2\alpha_i\alpha_j} \oint_{C_1} du_1 \ldots \oint_{C_{n-1}} du_{n-1} \oint_{S_1} d\vartheta_1 \ldots \oint_{S_{m-1}} d\vartheta_{m-1} \times$$
$$\times \prod_{i,k}(z_i - u_k)^{2\alpha_-\alpha_i} \prod_{i,l}(z_i - \vartheta_l)^{2\alpha_+\alpha_i} \times \frac{\prod_{k<s}(u_k - u_s)^{2\alpha_-^2} \prod_{l<t}(\vartheta_l - \vartheta_t)^{2\alpha_+^2}}{\prod_{k,l}(u_k - \vartheta_l)^2}\,. \tag{5.40}$$

Система контуров $\{C_i, S_j\}$ в этом интеграле должна, во всяком случае, быть выбрана таким образом, чтобы ни один из контуров не мог быть стянут в точку. Иначе функция (5.40) будет равна нулю. Более детальное исследование мы отложим до следующего раздела.

Интегральное представление (5.40) для функций конформной теории было найдено в недавней работе Фейгина и Фукса [39]. Описанный выше вывод, где мы использовали несколько иной подход по сравнению с оригинальной работой [39], взят из работы [12].

6. Четырехточечные корреляционные функции и операторная алгебра конформной теории

Построение корреляционных функций мы начнем с обсуждения некоторых свойств аналитических функций (5.40).

Наиболее простой является функция второго порядка, относящаяся к коррелятору $\langle \Phi_{nm}\Phi_{12}\Phi_{12}\Phi_{nm}\rangle$. По правилам, описанным в предыдущем разделе, имеем следующий интеграл:

$$\langle \Phi_{nm}\Phi_{12}\Phi_{12}\Phi_{nm}\rangle \sim \oint_C d\vartheta \langle V_{\alpha_{nm}}(z_1) V_{\alpha_{12}}(z_2) V_{\alpha_{12}}(z_3) V_{\alpha_{nm}}(z_4) J_+(\vartheta)\rangle \sim$$
$$\sim (z_{12} z_{13})^{2\alpha_{12}\alpha_{nm}} (z_{23})^{2\alpha_{12}^2} (z_{14})^{2\alpha_{nm}(2\alpha_0 - \alpha_{nm})} (z_{24} z_{34})^{2\alpha_{12}(2\alpha_0 - \alpha_{nm})} \times$$
$$\times \oint_C d\vartheta (\vartheta - z_1)^{2\alpha_+\alpha_{nm}} (\vartheta - z_2)^{2\alpha_+\alpha_{12}} (\vartheta - z_3)^{2\alpha_+\alpha_{12}} (\vartheta - z_4)^{2\alpha_+(2\alpha_0 - \alpha_{nm})}\,. \tag{6.1}$$

Используя трехпараметрическую группу проективных (или дробно-линейных) преобразований, по отношению к которым функции (5.40), (6.I) инвариантны, мы можем зафиксировать в функции (6.I) три точки из четырех. Функции такого типа известны в теории дифференциальных уравнений как фуксовы функции (см., например, работу [40]). Обычно выбирается следующая "калибровка":

$$z_1 = 0,\quad z_2 = z,\quad z_3 = 1,\quad z_4 \to \infty . \tag{6.2}$$

При этом функция (6.I) приводится к виду

$$I_C(z) = z^{2\alpha_{12}\alpha_{nm}} (1-z)^{2\alpha_{12}^2} \oint_C d\vartheta\, \vartheta^{2\alpha_+\alpha_{nm}} (\vartheta-1)^{2\alpha_+\alpha_{12}} (\vartheta-z)^{2\alpha_+\alpha_{12}} . \tag{6.3}$$

Контур интегрирования C в формуле (6.3) должен быть выбран замкнутым, идущим вокруг особенностей подынтегральной функции при $\vartheta = 0, z$, I, причем таким образом, чтобы он не мог быть стянут в точку. Однако, если интеграл вблизи особенностей сходится, в этом случае достаточно просто взять контур с концами, закрепленными в особенностях. Мы всегда будем предполагать сходимость. В противном случае подразумевается аналитическое продолжение со значений параметров, для которых интеграл сходится.

Можно убедиться, что для интеграла (6.I) имеется две независимые конфигурации контура C. Мы выберем контуры, показанные на рис. I4. Соответственно имеется две линейно-независимые функции

$$I_1(a,b,c;z) = \int_1^\infty d\vartheta\, \vartheta^a (\vartheta-1)^b (\vartheta-z)^c =$$

$$= \frac{\Gamma(-a-b-c-1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(-a-c)} F(-c,-b-a-c-1;-a-c;z); \tag{6.4}$$

$$I_2(a,b,c;z) = \int_0^z d\vartheta\, \vartheta^a (1-\vartheta)^b (1-\vartheta)^c = z^{1+a+c} \int_0^1 d\vartheta\, \vartheta^a (1-\vartheta)^c (1-z\vartheta)^b =$$

$$= z^{1+a+c} \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+c+2)} F(-b, a+1; a+c+2; z) . \tag{6.5}$$

Здесь $a = 2\alpha_+\alpha_{nm}$; $b = c = 2\alpha_+\alpha_{12}$; $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрические функции.

Интегралы (6.4), (6.5) являются двумя независимыми решениями дифференциального уравнения второго порядка, которое отвечает вырожденному оператору $\Phi_{12}(z)$ в интеграле (6.I) (см. уравнение (4.23)).

Для корреляционной функции, содержащей оператор третьего порядка Φ_{31}, согласно правилам предыдущего раздела, имеем следующий интеграл:

$$\langle \Phi_{nm}(0)\, \Phi_{31}(z)\, \Phi_{31}(1)\, \Phi_{nm}(\infty) \rangle \sim$$

$$\sim z^{2\alpha_{31}\alpha_{nm}} (1-z)^{2\alpha_{31}^2} \int_{C_1} du_1 \int_{C_2} du_2\, u_1^a (u_1-1)^b (u_1-z)^c \times$$

$$\times u_2^a (u_2-1)^b (u_2-z)^c (u_1-u_2)^g . \tag{6.6}$$

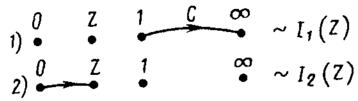


Рис. I4. Две независимые конфигурации контура C для интеграла (6.I)

Здесь $a = 2\alpha_-\alpha_{nm}$, $b = c = 2\alpha_-\alpha_{31}$, $g = 2\alpha_-^2$. На этот раз имеется три независимые конфигурации контуров. Мы их выбираем, как показано на рис. I5. Соответственно имеем три функции $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_3(z)$, которые являются решениями уравнения третьего порядка (4.33), отвечающего оператору $\Phi_{31}(z)$.

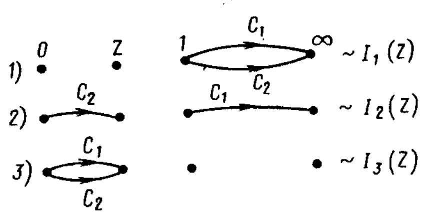


Рис. I5. Интегралы, отвечающие оператору $\Phi_{31}(z)$

Приведем еще пример функции 4-го порядка, содержащей оператор Φ_{22}

$$\langle \Phi_{nm}(0)\, \Phi_{31}(z)\, \Phi_{31}(1)\, \Phi_{nm}(\infty) \rangle \sim$$

$$\sim z^{2\alpha_{22}\alpha_{nm}} (1-z)^{2\alpha_{22}^2} \int_C du \int_{S'} d\vartheta\, u^a (u-1)^b (u-z)^c \times$$

$$\times \vartheta^{a'} (\vartheta-1)^{b'} (\vartheta-z)^{c'} (u-\vartheta)^g . \tag{6.7}$$

Здесь $a = 2\alpha_-\alpha_{nm}$, $b = c = 2\alpha_-\alpha_{22}$, $a' = 2\alpha_+\alpha_{nm}$, $b' = c' = 2\alpha_+\alpha_{22}$, $g = 2\alpha_+\alpha_- = -2$. Для этой функции число независимых конфигураций контуров равно четырем (рис. I6).

Обобщение теперь очевидно. Например, для функции

$$\langle \Phi_{nm}(0)\, \Phi_{k\ell}(z)\, \Phi_{k\ell}(1)\, \Phi_{nm}(\infty) \rangle \tag{6.8}$$

при $k\cdot\ell < n\times m$ будем иметь $k\cdot\ell$ линейно-независимых интегралов, которые являются решениями дифференциального уравнения порядка для оператора $\Phi_{k\ell}$ вырожденной конформной теории раздела 4.

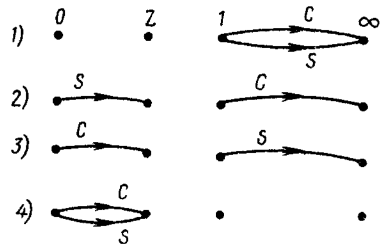


Рис. I6. Интегралы функции 4-го порядка

Таким образом, мы имеем полный набор аналитических функций, из которых будут строиться физические корреляционные функции конформной теории. Очевидно, что такие же функции мы будем иметь для зависимости корреляторов от своих сопряженных переменных $\{\bar z_i\}$.

Обратимся снова к функции второго порядка

$$\langle \Phi_{n_1 m_1}(0)\, \Phi_{12}(z)\, \Phi_{n_3 m_3}(1)\, \Phi_{n_4 m_4}(\infty) \rangle \sim$$
$$\sim z^{2\alpha_1 \alpha_2} (1-z)^{2\alpha_2 \alpha_3} \int_C dt\, t^a (t-1)^b (t-z)^c . \qquad (6.9)$$

Здесь $a = 2\alpha_1 \alpha_+$, $b = \alpha_3 \alpha_+$, $c = 2\alpha_2 \alpha_+$, $\alpha_i = \alpha_{n_i m_i}$ (сравните с формулой (6.3)). В этом случае имеется две функции $I_1(t)$ и $I_2(t)$ (6.4), (6.5). Нетрудно убедиться, что общий вид физической корреляционной функции должен быть следующим:

$$G(z,\bar z) = \sum_{i,j} X_{ij}\, I_i(z)\, \overline{I_j(z)} . \qquad (6.10)$$

Здесь X_{ij} - структурные коэффициенты, которые предстоит определить.

Заметим, что функции $I_i(z)$ не являются однозначными на комплексной плоскости. Хорошо известно, что при обходе по замкнутому контуру вокруг особенностей в точках $z = 0$ или $z = 1$, гипергеометрические функции (6.4), (6.5) переходят в свои линейные комбинации (см., например, работу [40])

$$I_i(z) \xrightarrow{g_0} I_i^{(g_0)}(z) = (g_0)_{ij}\, I_j(z) ; \qquad (6.11)$$

$$I_i(z) \xrightarrow{g_1} I_i^{(g_1)}(z) = (g_1)_{ij}\, I_j(z) \qquad (6.12)$$

(рис. I7). Преобразования (6.11), (6.12) для функций $\{I_i(z)\}$, которые являются полным набором решений линейного дифференциального уравнения, называются преобразованием монодромии.

При преобразованиях (6.11), (6.12), одновременных по z и $\bar z$, функция (6.10) будет, вообще говоря, изменяться. В то же время для

обычных операторов, таких, как оператор энергии или оператор маг-
нитного спина (параметр порядка в общем случае), т.е. для операто-
ров, не имеющих пространственного спина ($\Delta - \bar\Delta = 0$), физические
корреляционные функции должны быть однозначными на двумерной плос-
кости. Из этого условия или иначе из условия инвариантности функ-
ции $G(z,\bar z)$ (6.10) по отношению к преобразованиям монодромии
(6.11), (6.12) определяются структурные коэффициенты X_{ij} [11, 12].

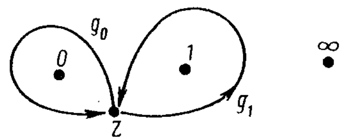


Рис. I7. При обходе по замкнутому контуру вокруг особенностей в точках $z = 0$ или $z = 1$ гипергеометрические функции переходят в свои линейные комбинации

Функции $I_1(z)$ и $I_2(z)$ (6.4), (6.5) называются канонически-
ми для точки $z = 0$, так как при обходе вокруг этой точки они лишь
умножаются на фазовый множитель. Действительно, из формул (6.4),
(6.5) следует

$$I_1(z) \sim F_1(z) ; \qquad (6.13)$$
$$I_2(z) \sim z^{1+a+c}\, F_2(z) , \qquad (6.14)$$

где функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ регулярны в точке $z = 0$. Откуда получаем

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(1+a+c)} \end{pmatrix} . \qquad (6.15)$$

Очевидно, что диагональная форма

$$G(z,\bar z) = \sum_i X_i\, I_i(z)\, \overline{I_i(z)} \qquad (6.16)$$

будет инвариантной по отношению к g_0. Остается обеспечить инвариант
ность функции (6.16) по отношению к преобразованию g_1 (обходу во-
круг точки $z = 1$, см. рис. I7). Этим условием определяются коэффи-
циенты X_1 и X_2, точнее их отношение X_1/X_2.

В отдельных простых случаях корреляционная функция может быть
вычислена также и по другому. Если, например, группа монодромии яв-
ляется весьма простой, то инвариантная форма $G(z,\bar z)$ может быть
определена также суммированием по группе

$$G(z,\bar z) = \sum_{g\binom{\text{но гр.}}{\text{моно}g}} I_1^{(g)}(z)\, \overline{I_1^{(g)}(z)} \quad . \tag{6.17}$$

Перед тем как закончить описание общей теории, рассмотрим снова простой пример из статистической физики. А именно, вычислим корреляционную функцию четырех спинов $\langle \sigma\sigma\sigma\sigma \rangle$ в модели Изинга. Конформная теория для этой модели была найдена в работе [I0]. Ей соответствует центральный заряд $C = I/2$. Оператором спина является оператор Φ_{21} (см. работу [I0]). Соответственно имеем корреляционную функцию

$$G(z,\bar z) \sim \langle \Phi_{21}(0)\, \Phi_{21}(z)\, \Phi_{21}(1)\, \Phi_{21}(\infty) \rangle \tag{6.18}$$

В частном случае модели Изинга, гипергеометрические функции вида (6.4), (6.5) вырождаются в алгебраические. Одно из решений соответствующего дифференциального уравнения имеет вид [I0]

$$I_1(z) = \sqrt{1 + \sqrt{1-z}} \ . \tag{6.19}$$

Эту функцию можно получить также из интегрального представления, описанного выше. Конкретно, корреляционной функции (6.18) соответствует интеграл

$$\int_C dt \langle V_{\alpha_{21}}(0)\, V_{\alpha_{21}}(z)\, V_{\alpha_{21}}(1)\, V_{2\alpha_0-\alpha_{21}}(\infty)\, J_-(t) \rangle \ . \tag{6.20}$$

Преобразования монодромии функции (6.19) особенно просты. Имеем

$$\sqrt{1+\sqrt{1-z}} \xrightarrow{g_0} \sqrt{1+\sqrt{1-z}} \ ; \tag{6.21}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1-z}} \xrightarrow{g_1} \sqrt{1-\sqrt{1-z}}, \quad g_0^2 = g_1^2 = 1 \ . \tag{6.22}$$

Тогда, согласно формуле (6.17), получаем

$$\langle \sigma(0)\sigma(z)\sigma(1)\,\sigma(\infty) \rangle \sim G(z,\bar z) \sim$$

$$\sim \sqrt{1+\sqrt{1-z}}\,\sqrt{1+\sqrt{1-\bar z}} + \sqrt{1-\sqrt{1-z}}\,\sqrt{1-\sqrt{1-\bar z}} \sim$$

$$\sim \sqrt{1+\sqrt{z\bar z} + \sqrt{(1-z)(1-\bar z)}} \ . \tag{6.23}$$

Возвращаясь к общим значениям z_1, z_2, z_3, z_4, несложно проверить, что из формулы (6.23) следует результат [I0]

$$\langle \sigma(z_1,\bar z_1)\sigma(z_2\bar z_2)\,\sigma(z_3\bar z_3)\,\sigma(z_4\bar z_4) \rangle \sim$$

$$\sim \sqrt{\left|\frac{z_{13}\, z_{24}}{z_{12}\, z_{23}\, z_{34}\, z_{14}}\right|^{1/2} + (2 \leftrightarrow 3) + (3 \leftrightarrow 4)} \ . \tag{6.24}$$

Этот коррелятор был первоначально вычислен в работе [4I] с использованием совершенно другой техники, и еще раньше в работе [42] для частного случая, когда все точки коррелятора расположены вдоль одной прямой.

Отметим, что если не считать статистических теорий, сводящихся к гауссовым и имеющих соответственно корреляционные функции вида (5.5), функция (6.24) для модели Изинга была единственным примером нетривиальной многоточечной функции, найденной до возникновения конформной теории. (Независимо от конформной теории в неопубликованной работе[43] была вычислена также корреляционная функция четырех операторов энергии $\langle \varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \rangle$ для модели Поттса, см. также работу [II])

Вернемся к общей теории и к корреляционной функции (6.16). Нам следует обеспечить ее инвариантность по отношению к преобразованию монодромии g_1. Как уже отмечалось, базис функций $\{I_i(z)\}$ (6.4), (6.5) является каноническим для точки $z = 0$. Однако мы всегда можем разложить эти функции по другому базису функций $\{\tilde I_i(z)\}$, каноническому для точки $z = I$

$$I_i(z) = \sum_j \alpha_{ij}\, \tilde I_j(z) \ . \tag{6.25}$$

Контуры интегрирования для функций $\tilde I_i(z)$ в интегральном представлении (6.9) показаны на рис. I8 (сравните с рис. I4 для функций $I_i(z)$).

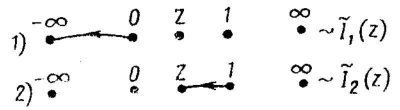


Рис. I8. Контуры интегрирования для функций $\tilde I_i(z)$

Подставив разложение (6.25) в формулу (6.16), получим

$$G(z,\bar z) = \sum_{i,k,\ell} X_i\, \alpha_{ik}\, \alpha_{i\ell}\, \tilde I_k(z)\, \overline{\tilde I_\ell(z)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k,\ell} \tilde X_{k\ell}\, \tilde I_k(z)\, \overline{\tilde I_\ell(z)} \ . \tag{6.26}$$

Так как в базисе $\{\tilde I_i(z)\}$ матрица g_1 диагональна, для инвариантности функции $G(z,\bar z)$ относительно преобразований g_1 достаточно обеспечить диагональность коэффициентов $X_{k\ell}$ в сумме (6.26). Таким образом, получаем систему уравнений

$$\sum_i X_i \alpha_{ik} \alpha_{i\ell} = 0 ; \quad k \neq \ell , \qquad (6.27)$$

которые определяют структурные коэффициенты X_i, если матрица α_{ik} в разложении (6.25) известна.

Для наглядности приведем вид решения уравнений (6.27) для случая корреляционной функции третьего порядка. В этом случае имеем

$$G(z,\bar z) = X_1 |I_1(z)|^2 + X_2 |I_2(z)|^2 + X_3 |I_3(z)|^2 .$$

Из системы (6.27) легко получить

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha_{23}\tilde{\alpha}_{31}}{\alpha_{13}\tilde{\alpha}_{33}} ; \quad \frac{X_2}{X_3} = \frac{\alpha_{33}\tilde{\alpha}_{32}}{\alpha_{23}\tilde{\alpha}_{33}} . \qquad (6.28)$$

Здесь $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(a, b, c ; g)$, $\tilde{\alpha}_{ij}(a, b, c ; g) = \alpha^{-1}_{ij}(a, b, c ; g) = \alpha_{ij}(b, a, c ; g)$. Параметры a, b, c, g функций $I_i(z) = I_i(a, b, c ; g ; z)$ определены в интеграле (6.6).

Матрица α_{ij} может быть вычислена с использованием интегральных представлений, описанных выше. Она была вычислена в работе [13] для самого общего случая и соответственно были найдены структурные коэффициенты X_i четырехточечных корреляционных функций для любых операторов вырожденной конформной теории. Во всех случаях коэффициенты выражаются через произведения Γ-функций, зависящих от параметров типа a, b, c, g в рассмотренных выше примерах (6.4)-(6.7) (см. работу [13]).

Через коэффициенты X_i четырехточечных функций могут быть найдены структурные коэффициенты операторной алгебры (1.2).

Действительно, рассмотрим функцию

$$\langle \Phi_k(z_1)\Phi_\ell(z_2)\Phi_k(z_3)\Phi_\ell(z_4)\rangle \sim$$
$$\sim \sum_p X_p^{(k\ell)} \, | I_p(\eta) |^2 . \qquad (6.29)$$

Здесь $\eta = (z_{12}z_{34})/(z_{13}z_{24})$ - ангармоническое отношение, которое переходит в z (в формулах этого раздела) в "калибровке" $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$.

Для корреляционной функции в левой части функции (6.29) мы можем применить операторное разложение для пар точек (z_1, z_2) и (z_3, z_4)

$$\Phi_k(z_1)\Phi_\ell(z_2) = \sum \frac{C^p_{k\ell}}{|z_{12}|^{2(\Delta_k+\Delta_\ell-\Delta_p)}} \left[\Phi_p(z_2) + \dots \right] \qquad (6.30)$$

и такое же разложение для $\Phi_k(z_3)\Phi_\ell(z_4)$. Подставив их в функцию (6.29), получим

$$\langle \Phi_k(z_1)\Phi_\ell(z_2)\Phi_k(z_3)\Phi_\ell(z_4)\rangle =$$
$$= \sum_p \frac{C^p_{k\ell} C^p_{k\ell}}{|z_{12}z_{34}|^{2(\Delta_k+\Delta_\ell-\Delta_p)}} \left[\langle \Phi_p(z_2)\Phi_p(z_4)\rangle + \dots \right] . \qquad (6.31)$$

С другой стороны, функции $I_p(\eta)$ в правой части функции (6.29) также имеют степенные особенности по $|z_{12}z_{34}|$ (см. особенности по $\eta = z$, например, в функции второго порядка (6.5)). Сравнивая соответствующие степени, можно убедиться, что формулы (6.29) и (6.31) представляют собой одно и то же разложение по операторам Φ_p в промежуточном "S-канале", если пользоваться терминологией дуальных амплитуд [19] (рис. 19). Отсюда заключаем, что

$$X_p^{(k\ell)} = (C^p_{k\ell})^2 . \qquad (6.32)$$

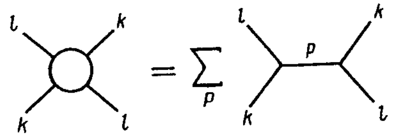


Рис. 19. Формулы (6.29) и (6.31) представляют собой одно и то же разложение по операторам Φ_p в промежуточном "S-канале"

Вычисление и анализ получаемой таким образом операторной алгебры см. в работах [13, 14]. Из явного вида коэффициентов $C^p_{k\ell}$ следуют, в частности, различные отщепления лишних операторов, а также замыкание алгебры конечным числом операторов в случае минимальных теорий.

Для демонстрации мы приведем формулу для $(1,n)$-операторной подалгебры. Оказывается, что операторы вида $\Phi_{1,n}$, либо $\Phi_{n,1}$ всегда образуют подалгебру из самих себя, не смешиваясь с остальными операторами $\Phi_{n,m}$ полной теории.

Заметим, что для всех моделей статистической физики, которые упоминались в разделе 4, подалгебра $(1,n)$ описывает физическую алгебру операторов энергии (см. работу [13]).

Для коэффициентов $C^{(1,p)}_{(1,s)(1,n)} \equiv C^p_{sn}$ алгебры операторов $\{\Phi_{1,k}$, $k = 1, 2, 3, \dots\}$ была найдена следующая формула:

$$C^p_{sn} = \prod_{i=0}^{k-2} \frac{\Gamma((i+1)\rho)}{\Gamma(1-(i+1)\rho)} \frac{\Gamma(1-\rho(s-1-i))\Gamma(1-\rho(n-1-i))\Gamma(-1+\rho(p+1+i))}{\Gamma(\rho(s-1-i))\Gamma(\rho(n-1-i))\Gamma(2-\rho(p+1+i))} . \qquad (6.33)$$

(с точностью до неких нормировок операторов, см. работы [I3, I4]). Здесь $k = (s+n-p+1)/2$; $\rho = \alpha_+^2$ (см. формулы (4.53), (5.34)). Для полуцелых значений k коэффициенты C^p_{sn} равны нулю.

Список литературы

I. Поляков А.М. - Письма в ЖЭТФ, 1970. т. I2, с. 38I.

2. Wilson K.G. - Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.

3. Kadanoff L.P. - Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p.1430.

4. Поляков А.М. - ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 27I; Поляков А.М. - ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 23.

5. Thirring W. - Annals of Physics, 1958, v. 3, p. 91.

6. Johnson K. - Nuovo Cimento, 1961, v.20, p. 773; Klaiber B. The Thirring Model. Lectures at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1967/ Edited by A.Barut and W.Brittin.

7. Phys.Rev.,1976, v. B13, p.316/ T.T.Wu, B.M.McCoy, C.A.Tracy, E.Barouch; Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля: Пер. с англ., М.: Мир, 1983.

8. Bergknoff H., Thacker H.B. - Phys. Rev., 1979, v.D19, p. 3666.

9. Luther A. - Phys.Rev., 1976, v.B14, p.2153.

I0. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. STATPHYS-15, Edinburgh, 1983; J.Stat. Phys., 1984, v.34, p.763; Nucl.Phys., 1984, v. B241, p. 333.

II. Dotsenko Vl.S. STATPHYS-15, Edinburgh, 1983; J.Stat.,Phys., 1984, v. 34, p. 781; Nucl.Phys., 1984, v.B235 FS11 , p. 54.

I2. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. - Nucl. Phys., 1984, v. B240 FS12 , p. 312.

I3. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. Four-point correlation functions and the operator algebra in the 2D conformal invariant theories with the central charg $C \leq 1$. - Preprint NORDITA-84/22; Nucl. Phys.B FS (в печати).

I4. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. - London Inst. Prep., 1984 (в печати).

I5. Privman V., Fisher M.E. - Phys.Rev., 1984, v. B30,p. 322.

I6. Cardy J.L. - J.Phys., 1984, v. A17, p. 385.

I7. Cardy J.L. Finite - size scaling in strips: antiperiodic boundary conditions. - Preprint UCSB TN-67, 1984.

I8. Virassoro M.A. - Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 2933.

I9. Mandelstam S. - Phys. Rep., 1974, v. C13, p. 259.

20. Kac V.G. - Lecture Notes in Physics, 1979, v. 94, p. 441.

2I. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. - Функциональный анализ и его приложения, 1982, т. I6, с. 47.

22. Den Nijs M.P.M. - J.Phys., 1979, v. A12, p. 1857.

23. Nienhuis B., Riedel E.K., Schick M. - J. Phys., 1980, v. A13, p. L189.

24. Pearson R.B. - Phys. Rev., 1980, v. B22, p. 2579.

25. Cardy J.L., Hamber N.W. - Phys., Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 499.

26. Nienhuis B. - J.Phys., 1982, v. A15, p. 199.

27. Den Nijs M.P.M. - Phys. Rev., 1983, v. B27, p. 1674.

28. Nienhuis B. - Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, p. 1062.

29. Nienhuis B. STATPHYS-15, Edinburgh, 1983; J.Stat. Phys., 1984, v. 34, p. 731.

30. Potts R.B. - Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, v.48,p.106.

3I. Wu F.Y. - Rev. Mod. Phys., 1982, v. 54, p. 235.

32. Baxter R.J. - J.Phys., 1973, v. C6, p. L445.

33. Temperley H.N.V., Lieb E.H. - Proc. Roy. Soc., 1971, v. A322, p. 251.

34. Baxter R.J., Kelland S.B., Wu F.Y. - J.Phys., 1976, v.A9, p. 397.

35. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. - Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 1575.

36. Andrews G.E., Baxter R.J., Forrester P.J. - J.Stat. Phys., 1984, v. 35, p. 193.

37. Huse D.E. Exact. Exponents for Infinitely Many New Multicritical Points. Bell Laboratories preprint, 1984.

38. Knizhnik V.G., Zamolodcikov A.B. - Nucl. Phys., 1984, v. B247, p. 83.

39. Feigin B.L., Fuchs D.B. (в печати).

40. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 194I.

4I. Luther A., Peschel I. - Phys.Rev., 1975, v. B12, p. 3908.

42. Kadanoff L.P. - Phys.Rev., 1969, v. 188, p. 859.

43. Kadanoff L.P., Nienhuis B. (Не опубликовано); Nienhuis B. (частное сообщение).