Хорошо известные представления симм. группы и алгебры Гекке:

1) <u>1-мерные</u>

	S_n	$H_n(q)$	
тривиальное (тождественное)	$s_i = 1$	$\sigma_i = q$	
знакопеременное	$s_i = -1$	$\sigma_i = -q^{-1}$	

<u>Зам</u>: замена $q \leftrightarrow -q^{-1}$ соответствует транспонированию диаграмм
$(\dim\lambda = \dim\lambda^T)$

$$H_n(-q^{-1}) = H_n(q)$$

2) <u>n-мерные для S_n и $H_n(q)$</u>:

Базис v_i $\quad i = 1, \dots n$

Перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ действует на них как

$$\pi v_i = v_{\pi(i)}$$

В частности
$$\underset{\begin{pmatrix} 1 \dots & i & i+1 & \dots n \\ 1 \dots & i+1 & i & \dots n \end{pmatrix}}{\overset{}{s_i}} v_j = \begin{cases} v_j & \text{если } j = i, i+1 \\ v_{i+1} & \text{если } j = i \\ v_i & \text{если } j = i+1 \end{cases}$$

Аналогичное представление для алгебры Гекке называется представлением **Burau** (оно же — предст. группы кос)

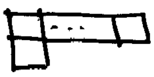
$$\sigma_i v_j = \begin{cases} q v_j & \text{если } j \neq i, i+1 \\ x^{-1} v_{i+1} + (q-q^{-1}) v_i, & \text{если } j = i \\ x v_i, & \text{если } j = i+1 \end{cases}$$

Матрица

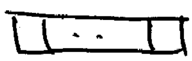
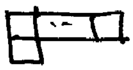
$$\sigma_i = \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad i \quad\; i+1 \\ \begin{pmatrix} q & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & q & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & x^{-1} \\ x & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & & q & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & q \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Зад</u>: проверьте, что это предст. Гекке $\forall x \neq 0$

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ для $H_3(q)$

Это представление приводимо: имеет одномерное inv подпространство $\left(v = \sum_i v_i \text{ в случае } S_n, \text{ а какое в } H_n(q)? \right)$, отвечающее  и $(n-1)$-мерное inv подпространство 

по n клеток

Итак Burau$_n$ =  $\oplus$ 

3) Представление S_n / $H_n(q)$ матрицами перестановки P / R-матрицами.

Пространство представления: $V^{\otimes n}$, где

V — некоторое N-мерное лин. пространство

Размерность: N^n — (конечно, это приводимое представление)

Типичный вектор: $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$

это не нумерация векторов базиса (как в случае Вигаи) это n разных каких-то векторов. Индекс фактически нумерует компоненту V в тензорном произведении $V^{\otimes n}$: $V^{\otimes n} = V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n$

$$s_i(v_1 \otimes .. \underline{v_i \otimes v_{i+1}} \otimes .. v_n) = v_1 \otimes \ldots \underline{v_{i+1} \otimes v_i} \ldots \otimes v_n$$

перестановка векторов v_i и v_{i+1}.

Такое действие s_i обозначают $P_{i\,i+1}$ — матрица перестановки

В случае $\dim V = 2$ для ~~некоторого~~ любого! базиса $\{u_1, u_2\}$ матрица P_{12} имеет вид:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 11 & 12 & 21 & 22 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & 1 \end{array}\right) \end{array} = P_{12}$$

перестановка не замечает преобразований базиса в V

Это важно потом

На том же пространстве $V^{\otimes n}$ действие

$H_n(q)$ задается матрицей R ~~[illegible]~~ $\in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 2})$

(в некотором базисе, уже не в любом)

$$\boxed{R^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = q^{\delta_{i_1 i_2}} \underbrace{P^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}}_{=\,\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}} + (q-q^{-1})\,\theta_{i_1 i_2}\, \underbrace{I^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}}_{=\,\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}}}$$

$i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N$

где $\delta_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1 & \text{если } i_1 = i_2 \\ 0 & \text{если } i_1 \neq i_2 \end{cases}$ $\quad \theta_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1 & \text{если } i_1 < i_2 \\ 0 & \text{если } i_1 \geq i_2 \end{cases}$

Графически:

$$R_{12} = q^{\delta_{12}} \overset{1\quad 2}{\times} + (q-q^{-1})\,\theta_{12} \overset{1\ 2}{||}$$

это не индексы матрицы
это номера пространств V, где она действует.

каждая линия - символ Кронекера

Для $\dim V = 2$ явный вид:

$$R_{12} = \begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & q & & & \\ 12 & & \lambda & 1 & \\ 21 & & 1 & & \\ 22 & & & & q \end{array}$$

Виден блок

Действие $\sigma_i \in H_n(q)$ на $V^{\otimes n}$ задается так

$$\sigma_i \mapsto \underbrace{I\otimes \dots \otimes I}_{i-1 \text{ раз}} \otimes R \otimes \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{n-i-1 \text{ раз}} =: R_{i\,i+1}$$

(тождественный оператор, т.е. единица)

$\sigma_i \mapsto R_{i\,i+1}$ – это R-матричное представление.

Оно:

а) локально, т.е. каждое σ_i действует на паре соседних пространств $\ldots V_i \otimes V_{i+1} \ldots$

б) однородно, т.е. σ_i действует на $V_i \otimes V_{i+1}$ так же как σ_k на $V_k \otimes V_{k+1}$

Такие представления принято называть R-матричными. $\boxed{\text{Зам.}}$ Существуют нелокальные и неоднородные обобщения – так называемые, динамические R-матричные. В них σ_k действует нетривиально на $V_k \otimes V_{k+1}$, а также как диагональная матрица (но не единица) на $V_1 \otimes \ldots \otimes V_{k-1}$.

Как наше R-матричное представление разбивается на неприводимые? Смотрим случай $\dim V = 2$

$n = 2$ $\qquad V^{\otimes 2} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \oplus 3\,\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline\end{array}$

$n=3:\ V^{\otimes 3}:$

$$\sigma_1 \mapsto R_{12} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} q & & & & & & & \\ & q & & & & & & \\ \hline & & \lambda & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & 1 & & \\ \hline & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & q & \\ & & & & & & & q \end{array}\right] \end{array} \qquad \sigma_2 \mapsto R_{23} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} q & & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & 0 & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & q & & & & \\ \hline & & & & q & & & \\ & 0 & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & q \end{array}\right] \end{array}$$

Перенумеруем базис: inv подпространства

$$\sigma_1 \mapsto R_{12} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \underbrace{111} & \underbrace{112 & 121 & 211} & \underbrace{122 & 212 & 221} & \underbrace{222} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} q & & & & & & & \\ & q & & & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & q & \\ & & & & & & & q \end{array}\right] \end{array} \qquad \sigma_2 \mapsto R_{23} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 111 & 112 & 121 & 211 & 122 & 212 & 221 & 2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} q & & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & q & & & & \\ \hline & & & & q & & & \\ & & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$V^{\otimes 3} = 2\,\ydiagram{3} \oplus 2\,\text{Вигаи} = 4\,\ydiagram{3} \oplus 2\,\ydiagram{2,1}$$

Замечаем:

Подпространства $V^{\otimes n}$ с фиксированным числом 1-х и 2-х базисных векторов u_1 и u_2 из V — инвариантны.

Подпространства $111\ldots1 \leftarrow$, $22\ldots2 \leftarrow$ одномерна — $\ydiagram{2}\cdots\ydiagram{2}$

Подпространства $\{11\ldots12\} \leftarrow$, $\{22\ldots21\} \leftarrow$ Вигаи — $\ydiagram{3,1}\ \oplus\ \ydiagram{3}$

Случай $n=4:\ V^{\otimes 4}$

1111 и 2222 — $\ydiagram{4}$

6-мерно

Новое: $\{1122\} = \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{4}$

$\{1112\}$ и $\{2221\}$ — $\ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{4}$

$$V^{\otimes 4} = 5\ \ydiagram{4} \oplus 3\ \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{2,2}$$

Случай $n=5$: $V^{\otimes 5}$

$\{11122\}$ и $\{22211\}$ $\leftarrow$ $\ydiagram{5} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{3,2}$

$\{11112\}$ и $\{22221\}$ $\leftarrow$ $\ydiagram{5} \oplus \ydiagram{4,1}$

$\{11111\}$ и $\{22222\}$ $\leftarrow$ $\ydiagram{5}$

Итого $$V^{\otimes 5} = 6\ \ydiagram{5} \oplus 4\ \ydiagram{4,1} \oplus 2\ \ydiagram{3,2}$$

Общее правило для $V^{\otimes n}$, $\dim V = 2$

(пусть $k \geq n-k$)

$$\{\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{2\ldots2}_{n-k}\} = \boxed{1\ldots n} \oplus \ydiagram{n-1,1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\overbrace{\ydiagram{k,n-k}}^{k}}_{n-k}$$

$\dim = C_n^k$

$$V^{\otimes n} = (n+1)\ \boxed{1\ldots n} \oplus (n-1)\ \ydiagram{n-1,1} \oplus (n-3)\ \ydiagram{n-2,2} \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \begin{pmatrix} \text{если } n\text{-чет} & \overbrace{\ydiagram{n/2,n/2}}^{n/2} \\ \text{если } n\text{-нечет} & 2\ \underbrace{\overbrace{\ydiagram{\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2}}}^{\frac{n+1}{2}}}_{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\lambda = \underbrace{\overbrace{\ydiagram{k,n-k}}^{k}}_{n-k}$ — встречается столько раз, каково число разных расстановок чисел 1 и 2 в λ, не убывающих слева-направо и строго возрастающих сверху вниз.

— $(2k-n+1)$ раз $\equiv$ размерность пространства спина $S(k-\frac{n}{2}$

(8)

Общее правило для $V^{\otimes n}$ $\dim V = N$ для наших R-матриц (см. стр. 4)

Rem: $\exists$ другие R-матрицы, для них другие правила разложения V

— $V^{\otimes n}$ разлагается в сумму неприводимых представлений, отвечающих диаграммам с $\leq N$ строк.

— Мультиплетность μ_λ представления λ в $V^{\otimes n}$ (сколько раз λ встречается в разложении $V^{\otimes n}$ на неприводимые) вычисляется так:

числа n_i в клетках

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline N & N+1 & N+2 & N+3 & N+4 & N+5 \\ \hline N-1 & N & N+1 \\ \cline{1-3} N-2 & N-1 & N \\ \cline{1-3} N-3 & N-2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \mu_\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} n_i}{\prod_{i=1}^{n} h_i}$$

h_i — длины крюков

Например при $N=2$:

$$\mu_{\tiny\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{2\cdot 3\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 1} = 2 \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \leftarrow n_i \qquad h_i = \{1,1,3\}$$

при $N=3$:

$$\mu_{\tiny\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{3\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 1\cdot 1} = 8 \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \leftarrow n_i$$

Другое определение μ_λ:

μ_λ — число расстановок чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ в клетки λ таких, что числа не убывают слева-направо и возрастают сверху-вниз (semi-standard Young tableaux)

Проверим размерности:

$N=2$, $n=3$

$$\dim V^{\otimes 3} = 8 = 4\,\underbrace{\square\square\square}_{\overset{\shortparallel}{1}} \oplus 2\,\underbrace{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{2}} = 4 + 2\times 2$$

Другое определение $\mu_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$: Полустандартные таблицы при $N=3$: $\begin{smallmatrix}1&1\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1&1\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2&2\\3\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2&3\\3\end{smallmatrix}$ – 8 штук.

$N=3$, $n=3$

$$\dim V^{\otimes 3} = 27 = 10\,\underbrace{\square\square\square}_{1} \oplus 8\,\underbrace{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}_{2} \oplus 1\,\underbrace{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}_{1} = 10+2\times 8+1$$

Замечание: для представления $H_n(q)$, задаваемого R-матрицей со св 4 с $\dim V=N$ идемпотент $\begin{smallmatrix}1\\\vdots\\N+1\end{smallmatrix}$, вычисленный в этом представлении $\equiv 0$.

Это отражение того факта, что нельзя ~~так~~ устроить антисимметричную комбинацию $(N+1)$ вектора в N-мерном пространстве.

Фактически R-матрица со св 4 задаёт точное представление фактор-алгебры алгебры Гекке по соотношению

(ядро представления $=0$ $\shortparallel$ точное)

$$\begin{smallmatrix}1\\\vdots\\N+1\end{smallmatrix} = 0$$

это идемпотент в $H_{N+1}(q)$ построенный из элементов JM.

В случае $N=2$ такая ~~алг~~ фактор-алгебра называется алгеброй Темперли-Либа (Temperley-Lieb)

Её неприводимые представления нумеруются диаграммами Юнга с 1 и 2 строками. Факторизующее условие

$$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \approx (J_2-q^2)(J_3-q^2)=0$$

Существуют другие R-матричные представления. Для каждого из них какой-нибудь идемпотент должен зануляться потому, что

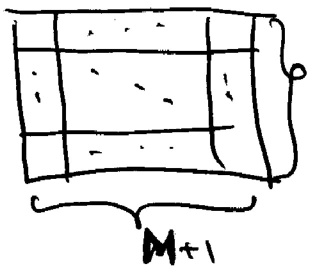
$\dim V^{\otimes n} = N^n$

$\dim(\mathrm{End}(V^{\otimes n})) = N^{2n}$ → растет медленней чем $\dim H_n(q) = n!$

(в R-матр. представлениях)

Оказывается, зануляться могут идемпотенты, отвечающие прямоугольным диаграммам только

Если



$N+1$, $M+1$

$= 0$ в некотором R-матричном представлении, то такое представление — $GL(N|M)$ типа.

Оно связано с (квантовыми) супер-группами Ли $GL(N|M)$

↑ четные переменные; ↑ нечётные (Грассмановы) переменные

Например, R-матрица ($\dim V = 2$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & -q^{-1} \end{array}\right)$$

— типа $GL(1|1)$

Для неё: $V^{\otimes 2} = 2\,\square\square \oplus 2\,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ — совсем другое правило разложения $V^{\otimes 2}$ на неприводимые

И для неё: $\boxplus = 0$