Лекция 2

<u>Напоминание</u>: конечномерные полупростые алгебры.

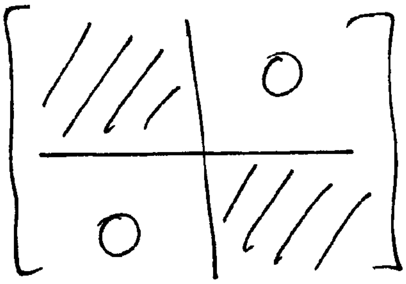
$\boxed{\text{Алгебра полупроста} \Leftrightarrow \forall \text{ её представление вполне приводимо}}$

Представление

$V = V_1 \oplus V_2 \qquad v \in V \qquad v = v_1 + v_2, \; v_i \in V_i$

$$v = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \vdots \end{array}\right) \begin{array}{l} \} \, v_1 \\ \} \, v_2 \end{array}$$

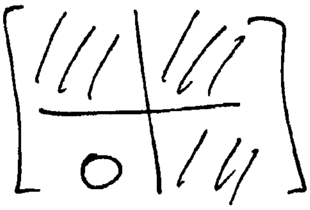
Действие алгебры на таком представлении:



$\} \, v_1$
$\} \, v_2$

— блочно-диагональная матрица

<u>Контр-пример</u>:



— блочно-треугольная матрица соответствует не вполне приводимому представлению

т.е. приводимому, но <u>не разложимому</u> в прямую сумму подпредставлений.

Матричная алгебра $Mat(N, \mathbb{C})$

порождается матричными единицами:
$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 \; 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Таблица умножения:

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

Отступление

<u>Регулярное представление ρ_{Reg}</u>: действие алгебры на самой себе умножением (скажем, слева)

Исследование алгебры $\Longleftrightarrow$ Исследование её ρ_{Reg}

Напр.: $\dim(\text{алгебры}) = \dim(\rho_{Reg})$

Обозначим: $\left\{ \begin{array}{l} v_i := E_{i*} \qquad i = 1, \dots N \\ \qquad\quad\ \uparrow \forall \text{ фикс. индекс} \\ V = \mathrm{Span}\{v_i\}, \ \dim V = N. \end{array} \right.$

$E_{jk} v_i = \delta_{ki} v_j \Rightarrow$ представление V – неприводимо

$$\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} \cdots & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{matrix} & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \qquad \boxed{\rho_{Reg} = N \rho_V}$$

– матрица расслаивается на N столбцов

Теорема (Wedderburn – Artin)

Всякая полупростая алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ изоморфна прямому произведению матричных алгебр $\mathrm{Mat}(N_\alpha, \mathbb{C})$

$$\mathcal{A} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \} N_1 \\ \} N_2 \\ \} N_3 \end{array} \end{array}$$

V_3

$$\rho_{Reg}\,\mathcal{A} = \bigoplus_\alpha \underbrace{N_\alpha}_{=\dim\rho_{V_\alpha}} \cdot \rho_{V_\alpha} \Rightarrow \dim\mathcal{A} = \sum_\alpha N_\alpha^2$$

Разложение $\rho_{Reg}\,\mathcal{A}$ на неприводимые подпредставления	$\Longleftrightarrow$	Разложение единицы в алгебре $\mathcal{A}$ в сумму <u>взаимно-ортогональных примитивных идемпотентов</u> (Пирсовское разложение Peirce

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} e_1\; e_2 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots\; e_k\; \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

V_k

$$1 = \sum_i e_i \qquad \left(\begin{array}{l} e_i = E_{ii} \\ \text{в } \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}) \end{array} \right)$$

$$V_k = \mathcal{A} e_k$$

Свойства примитивных идемпотентов, e_i образующих Пирсовское разложение:

1) $e_i = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ — единица в одном месте на диагонали

$$\sum_i e_i = 1$$ — <u>полнота</u>

2) $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ — <u>ортонормированность</u>

3) $\nexists\; e'_a, e'_b : \; e_i = e_a + e_b$ и $e_a e_b = \delta_{ab} e_a$ — <u>примитивность</u>

4) Подалгебра порожденная всеми e_i — <u>max коммутативная подалгебра в $\mathcal{A}$</u> (подалгебра диагональных матриц)

5) Пирсовское разложение неоднозначно: можно устроить преобразование подобия $e_i \to u e_i u^{-1}$

6) Сумма примитивных идемпотентов, находящихся в одном блоке — есть центральный идемпотент.

$$e^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \boxed{\ddots} & \\ 0 & & \boxed{\ddots} \end{pmatrix} = \sum_{i \in \text{блоку}(\alpha)} e_i$$

блок (α)

$1 = \sum_\alpha e^{(\alpha)}$ — центральное разложение Пирса.

<u>Размерность центра $\mathcal{A}$</u> = число центр. идемпотентов $e^{(\alpha)}$ = число различных неприводимых представлений.

$e^{(\alpha)}$ — определены однозначно

Вернемся к алгебрам Гекке $H_n(q)$

Напоминание: – это фактор алгебра в $\mathbb{C}[B_n]$

* Артиново представление: $\sigma_i \quad i=1\ldots n-1$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \forall\ |i-j|\geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ \sigma_i^2 = 1 + \underbrace{(q-q^{-1})}_{\lambda}\sigma_i & \text{– условие Hecke} \end{cases}$$

* $H_n(1) = \mathbb{C}[S_n]$, $H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n]$ для "почти всех" $q\in\mathbb{C}\setminus\{$

* Элементы Jucys - Murphy

$J_1 = 1$, $J_{k+1} = \sigma_k J_k \sigma_k$ – max коммут подалгебра

Этот факт нетривиален. Мы его не доказываем.

* Центр $H_n(q)$ состоит из симметрических полиномов от переменных $J_1, J_2, \ldots, J_n$

Упр: доказать это.

Проверить 1) $\sigma_k J_k J_{k+1} = J_k J_{k+1}\sigma_k \Leftarrow$ соотн. кос.

2) $\sigma_k(J_k+J_{k+1}) = (J_k+J_{k+1})\sigma_k \Leftarrow$ условие Hecke!

В $\mathbb{C}[B_n]$ этого нет!

Структура подалгебры JM

(Вершик называет её подалгеброй Гельфанда–Цетлина)

* она max коммутативная $\Rightarrow$ в ней можно искать примитивные идемпотенты $H_n(q)$

* она конечномерная $\Rightarrow$ $\exists$ тождества. Они и задают структуру JM-подалгебры.

Ищем тождества:

$\underline{H_2(q)}$: $(J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2}) = 0$ $\leftarrow$ это то же условие Гекке.

Отступление: полиномиальные тождества и Пирсовские разложения

$$\Pi(x) = \prod_\alpha (x - \mu_\alpha) \equiv 0 \qquad \mu_\alpha \text{ – попарно различные}$$

Определим ~~пр.~~ "идемпотенты"

$$P_\alpha(x) := \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{(x - \mu_\beta)}{(\mu_\alpha - \mu_\beta)}, \quad \text{тогда}$$

проверьте:

$$\boxed{\sum_\alpha P_\alpha(x) = 1, \quad P_\alpha(x)\, P_\beta(x) = \delta_{\alpha\beta}\, P_\alpha(x) \qquad x\, P_\alpha(x) = \mu_\alpha\, P_\alpha(x)}$$

метод проверки: если полином степени $(n-1)$ зануляется в n точках, то он $\equiv 0$.
Посмотрите значения $\sum_\alpha P_\alpha(x)$ при $x = \mu_\alpha$

Итак, в $H_2(q)$ у нас есть 2 проектора: (идемпотента)

$$A := \frac{J_2 - q^2 1}{q^{-2} - q^2} = \frac{-\sigma_1 + q1}{q + q^{-1}}$$ (аналог антисимметризатора индексов 2-вектора $\frac{I-P}{2}$)

$$S := \frac{J_2 - q^{-2} 1}{q^2 - q^{-2}} = \frac{\sigma_1 + q^{-1} 1}{q + q^{-1}}$$ (аналог симметризатора $\frac{I+P}{2}$)

A и S – вся алгебра $H_2(q)$, она 2-мерна.

Первый нетривиальный уровень $\underline{\underline{H_3(q)}}$:

* кроме J_2 появился J_3 – на него должны быть ограничения, т.е. нам нужно знать его спектр

Заметим: а) есть одномерные представления $H_3(q)$. Их 2 штуки: $\sigma_i = q$ и $\sigma_i = -q^{-1}$ (следует из усл. Hecke)

Для них $J_2 = q^{\pm 2}$ (см. случай $H_2(q)$),

а $\underline{J_3 = q^{\pm 4}}$. Итак $\{q^4, q^{-4}\} \in Spec(J_3)$

б) Можно проверить, что если $\{a, b\} \in Spec(J_k, J_{k+1})$ то $\exists$ возможность, что $\{b, a\} \in Spec(J_k, J_{k+1})$.

Поэтому J_3 имеет возможность принимать те собств. значения, что были у $J_2 - q^{\pm 2}$

(подробно обсудим это позднее)

Итак, предполагаем, $Spec(J_3) \ni \{q^{\pm 2}, q^{\pm 4}\}$.

На самом деле:

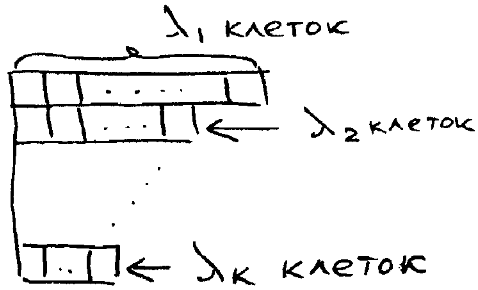
$$\boxed{\begin{gathered}(J_2 - q^2)(J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) \equiv 0 \\ (J_2 - q^{-2})(J_3 - q^{-2})(J_3 - q^4) \equiv 0\end{gathered}}$$

Больше независимых тождеств нет!

Чтобы сформулировать общее правило построения тождеств, сделаем комбинаторное отступление:

1) Разбиение $\lambda \vdash n$ $\Leftrightarrow$ диаграмма Юнга λ

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}, \\ &\text{где } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \\ &\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n \end{aligned}\right] \Leftrightarrow \quad \lambda =$$



2) Стандартная таблица — это диаграмма Юнга, в клетки которой расставлены числа $1, 2, \dots, n$, так что числа возрастают слева-направо в строках и сверху вниз в столбцах.

1	2	5	7
3	4		
6			

Как будто мы кидаем одну за другой пронумерованные клетки $\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}$ в угол, и они притягиваются к стенкам.

3) Содержание (content) клетки

$$\begin{array}{l|llll} & \to x & & & \\ \hline & 1 & q^2 & q^4 & q^6 \; \dots \\ & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \; \dots \\ & q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 \; \dots \\ & q^{-6} & q^{-4} & q^{-2} & 1 \; \dots \\ \downarrow y & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\mathrm{Cont}\left(\begin{matrix}\text{клетки с} \\ \text{координатами} \\ (x, y)\end{matrix}\right) = q^{2(x-y)}$$

Переведем хар. тождества для JM элементов на язык таблиц Юнга

Стандартная таблица Юнга с n клетками $\Longleftrightarrow$ примитивный идемпотент в $H_n(q)$, полученный из хар. тождеств на JM элементы

Клетка с номером $\boxed{k}$ $\Longleftrightarrow$ Элемент JM J_k

Контент клетки $\boxed{k}$ в таблице $\Longleftrightarrow$ Собственное значение J_k на примитивном идемпотенте

<u>Пример $H_1(q)$</u>

$\boxed{1}$ ← это $J_1 = 1$ — контент клетки в верхнем левом углу

<u>Пример $H_2(q)$</u>

$\begin{array}{|ll} \boxed{1} & * \\ * & \end{array}$ ← сюда можем кинуть клетку $\boxed{2}$

Контент этих позиций q^2 и q^{-2}.

Поэтому $Spec(J_2) = \{q^{\pm 2}\}$ и хар. тождество $(J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2}) \equiv 0$

Теперь строим идемпотентов:

$\begin{array}{|ll} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \times & \end{array}$ ← сюда <u>не</u> кинули клетку $\boxed{2}$ $\Rightarrow$ Соответствующий идемпотент

Content места куда <u>не</u> кинули [

$$\frac{J_2 - q^{-2}}{q^{+2} - q^{-2}} =$$

Content места куда <u>встала</u> $\boxed{2}$, т.е. со

ственное значен

J_2

Итак:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} = \frac{J_2 - q^{-2}}{q^2-q^{-2}} = S, \text{ и } J_2 \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} = q^2 \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}$$

Cont. этой клетки

Аналогично

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}^{\,x} \longrightarrow \frac{J_2 - q^{+2}}{q^{-2}-q^2} = A, \quad J_2 \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} = q^{-2} \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

<u>Далее $H_3(q)$</u> Кидаем клетку $\boxed{3}$ в имеющиеся заготовки:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}^{\,x}_{\,x} \Longrightarrow \text{хар. тождество } (J_2-q^2)(J_3-q^2)(J_3-q^{-4}) \equiv 0$$

соответствует $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$

контенты мест, куда можно бросить $\boxed{3}$

<u>Идемпотенты:</u>

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}^{\,x} = \underbrace{\frac{(J_2-q^2)}{(q^{-2}-q^2)}}_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}} \frac{(J_3-q^2)}{(q^{-4}-q^2)}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}_{\,x} = \underbrace{\frac{(J_2-q^2)}{(q^{-2}-q^2)}}_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}} \frac{(J_3-q^{-4})}{(q^2-q^{-4})}$$

Имеем $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$,

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}^2 = \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = 0$$

<u>Итак:</u> $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ был prime idempotent в $H_2(q)$, перестал им быть в $H_3(q)$. Развалился в сумму двух prime idempotents в $H_3(q)$: $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$

Аналогично:

$\begin{array}{lll} 1 & 2 & x \\ x & & \end{array} \Rightarrow$ хар. тождество $(J_2-q^{-2})(J_3-q^{-2})(J_3-q^{4})=0$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ x & & \end{array} = \frac{(J_2-q^{-2})}{(q^2-q^{-2})}\frac{(J_3-q^{-2})}{q^4-q^{-2}}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & x \\ 3 & & \end{array} = \frac{(J_2-q^{-2})}{(q^2-q^{-2})}\frac{(J_3-q^{4})}{(q^{-2}-q^{4})}$$

Всего:

$$1 = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} + \begin{array}{ll} 1 & 2 \end{array} = \underbrace{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} + \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array} + \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array} + \begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \end{array}}_{\text{Пирсовское разложение единицы в } H_3(q)}$$

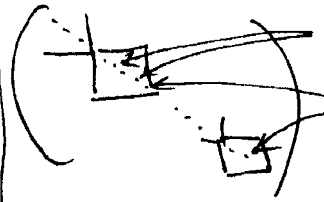
Продолжение очевидно: в $H_4(q)$ кидаем клетку $\boxed{4}$

$\begin{array}{lll} 1 & 2 & x \\ 3 & x & \\ x & & \end{array} \Rightarrow$ хар тождество $\underbrace{(J_2-q^{-2})(J_3-q^{4})}_{\text{это от } \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}}(J_4-q^{4})(J_4-1)(J_4-q^{-4})=$

Упр: построить 3 соответсвующих prime idempotents:

$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 4 \\ 3 & & \end{array}$, $\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$ и $\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$

<u>Следующая задача</u>: понять, какие из примитивных идемпотентов относятся к одному и тому же матричному блоку?



идемпотенты из одного блока

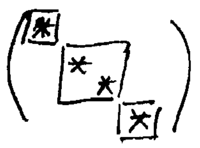
а эти — из разных.

<u>Соображения</u>: — на идемпотентах из одного блока центральные элементы алгебры должны принимать <u>одни и те же собств. значения</u>, т. к. идемпотенты одного блока порождают <u>эквивалентные представления</u>

— В $H_n(q)$ центральные элементы — это симм. функции $J_1, J_2, \dots J_n$. На идемпотентах ⟺ стандартных таблицах они вычисляются как симм. ф-ции контентов клеток таблицы.

<u>Очевидно</u>: такие симм. ф-ции совпадают для <u>таблиц одной формы</u>

<u>Итак, для $H_3(q)$</u>:



$\begin{array}{|ccc}1&2&3\end{array}$ — один матричный блок размера 1×1

$\begin{array}{|c}1\\2\\3\end{array}$ — еще блок 1×1

$\begin{array}{|cc}1&2\\3&\end{array}$ и $\begin{array}{|cc}1&3\\2&\end{array}$ — идемпотенты из блока 2×2

$$\dim H_3(q) = 1^2+1^2+2^2 = 6 = 3! \text{ — верно.}$$

<u>Упр: проверить $\dim H_4(q) = 4!$</u>

Центральные идемпотенты $H_3(q)$

$\begin{array}{|c}1\\2\\3\end{array}$, $\begin{array}{|ccc}1&2&3\end{array}$, и $\left(\begin{array}{|cc}1&2\\3&\end{array} + \begin{array}{|cc}1&2\\3&\end{array}\right)$

Другая конструкция элементов центра $H_n(q)$

Рассмотрим $C_n = \sum_{i=1}^{n} J_i$ — это простейшая симм. функция J_i

$\Downarrow$

элемент центра $H_n(q)$

$\boxed{\times}$ C_n — порождает весь центр $H_n(q)$

Чтобы построить центральные идемпотенты нужно знать спектр C_n.

Например в случае $H_3(q)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & q^2 & q^4 \\ \hline\end{array} \leftarrow \quad C_3 = 1+q^2+q^4 =: a$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & q^2 \\ \hline q^{-2} & \\ \cline{1-1}\end{array} \leftarrow \quad C_3 = q^{-2}+q^2+1 =: b$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline q^{-2} \\ \hline q^{-4} \\ \hline\end{array} \leftarrow \quad C_3 = 1+q^{-2}+q^{-4} =: c$$

$\Downarrow$

Хар. тождество на C_3: $\quad (C_3-a)(C_3-b)(C_3-c) \equiv 0$

Центр. идемпотент:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; & \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|cc}1 & 2 \\ 3 & \end{array} + \begin{array}{|cc}1 & 3 \\ 2 & \end{array} = \frac{(C_3-a)}{b-a}\,\frac{(C_3-c)}{(c-a)}$$

и т.д.

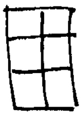
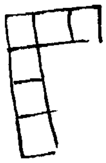
Преимущество рассмотрения $H_n(q)$ перед $\mathbb{C}[S_n]$:

- при $q \to 1$ знаменатели в наших формулах для идемпотентов сингулярны. Нужно сократить нули знаменателя с нулями числителя.

  Это важно.

- Кроме того, при $q \to 1$ надо менять определение контента клетки $q^{2k} \to k$

$$\begin{array}{|cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & \cdots \\ -2 & -1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots \end{array}$$

При этом иногда происходит вырождения. Например, собственное значение C_6 на диаграммах  и 

вычисляется как: $\begin{cases} 2+q^2+2q^{-2}+q^{-4} \text{ и } 1+q^2+q^4+q^{-2}+q^{-4}+q^{-6} \\ \text{в случае } H_6(q) \end{cases}$

А тут — порядок, и можно сделать предел $q \to 1$

$\Big\{ \underline{-3 \text{ и } -3}$ — в случае S_6

тут вырождение, что не позволяет писать центральные проектора

Когда $H_n(q)$ <u>не полупроста</u>?

Тогда, когда знаменатели в формулах для prime idempotents зануляются. А это происходит если

$$\boxed{k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = 0 \text{ для } k = 2, 3 \dots, n}$$

<u>Джексоновские q-числа</u>

Это рациональные точки (но не все) на единичной окружности в $\mathbb{C}$.