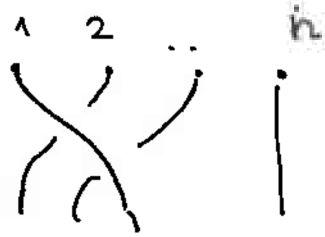
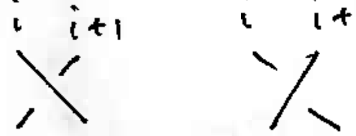
1) Группа кос: B_n



– коса.

- Наложение кос – умножение (ассоциативно)
- Единица $|| \dots |$
- обратная коса $\exists$ (расплетение)

Элементарные сплетения:

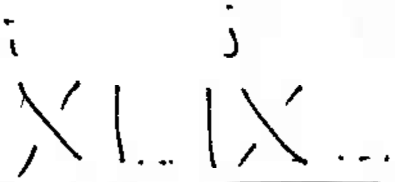


g_i $\quad$ g_i^{-1}

B_n порождена $g_i^{\pm 1}$ $\quad i=1\dots n-1$

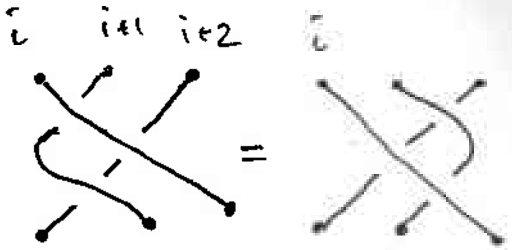
Есть ли соотношения между g_i?

– (2) $g_i g_j = g_j g_i \quad |i-j| \geq 2$



– (1) $g_i g_i^{-1} = 1$

– (3) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$



Artin's presentation

$\boxed{У}$ Эти соотношения определяют группу кос

$\boxed{31}$ (2) – знакомо по квантовой механике
даёт упорядочение операторов (алфавитное)

(3) – другое, но похоже! С ним "упорядочение" сложнее!! (увидим)

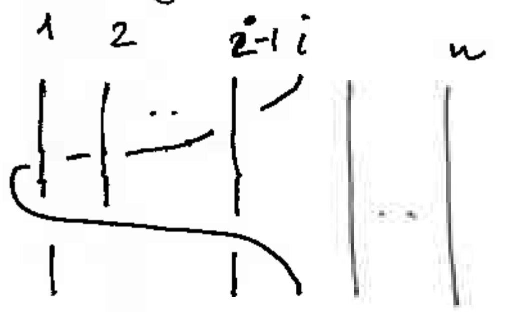
3.2 $\# B_n = \infty$

3.3 Будем работать часто не с группой, а с групповой алгеброй $\mathbb{C}[B_n]$

* умножения на числа из $\mathbb{C}$
* сложение

$$\# B_n = \dim \mathbb{C}[B_n] \ (= \infty)$$

2) Коммутативный набор



$=: J_i$ (Юцис - Мэрфи) JM

$J_1 := 1$

$$\boxed{J_i J_j = J_j J_i} \ !$$

* В терминах генераторов:

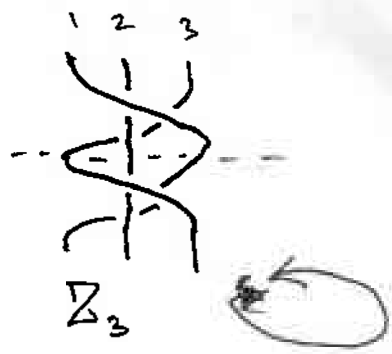
$$\boxed{J_2 = g_1^2 \quad J_3 = g_2 g_1^2 g_2 \quad \ldots \quad J_{i+1} = g_i J_i g_i}$$

Упр: проверить коммутативность

* Подгруппа порожденная J_i – бесконечна
* Конструкция набора J – индуктивна!
* Центр

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} J_i$$

Z_2



Z_3

Зам Z_i $i=1\ldots n$ генерируют тоже подалгебру JM – это как базис Гельфа-Цетлина в $GL(n)$ / Верма

$$Z_3 = g_1^2 (g_2 g_1^2 g_2) = g_1 \underline{g_2 g_1 g_2} \, g_1 g_2 =$$

$$= (g_1 g_2)^3 = (g_1 g_2 g_1)^2 = \underline{\text{поворот на } 360^\circ}$$

C_i – еще один базис генераторов B_n – циклы

трижды цикл

дважды поворот на 180° (отражение)

[V] Центр B_n порожден 1 и Z_n (кроме случая $n=2$)

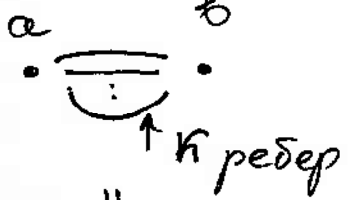
$$Z_n = \Theta_n^2 \text{, где}$$

Зам: $\Theta_{n+1} := \Theta_n (g_n g_{n-1} \dots g_1)$ $\Theta_1 = 1$

$g_i \Theta_n = \Theta_n g_{n-i}$ — вот оно отражение

3) Общая конструкция групп (алгебр) типа кос.

группа ⟺ граф
генератор ⟺ вершины
соотношение ⟺ ребро



⇓

$$\underbrace{a\,b\,a \dots}_{k+2 \text{ сомножителя}} = \underbrace{b\,a\,b \dots}$$

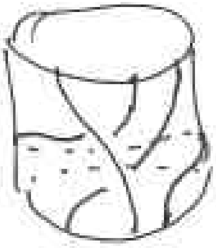
$ab = ba$ $aba = bab$

* ⇐ группа кос B_n

* ⇐ аффинная группа кос $\tilde{B}_n$. Косы на цилиндре

картинки эквивалентны

Задания в генераторах нет!



* ⇐ группа кос типа "B_n"

Косы оплетающие стержень BB_n

$abab = baba$

$C_n = g_{n-1} g_{n-2} \dots g_1 g_0$ — цикл.

$$\begin{cases} C_n g_k C_n^{-1} = g_{k-1} \quad \text{для} \quad k = 2 \dots n-1 \\ C_n^2 g_1 C_n^{-2} = g_{n-1} \end{cases}$$

Задаём $g_n = C_n g_1 C_n^{-1}$ — это реализация элемента из $\tilde{B}_n$ в BB_n

$\widetilde{BB}_n \xrightarrow{\text{Hom}} BB_n$

Наоборот нетривиально

Дополним $\tilde{B}_n$ внешним автоморфизмом $\tilde{C}_n$: (симметрия диаграммы)

$$\tilde{C}_n g_i \tilde{C}_n^{-1} = g_{i-1} \qquad i = 1 \dots n \pmod n, \quad 0 = n$$

$$(\tilde{C}_n g_1 \tilde{C}_n^{-1} = g_n)$$

Тогда

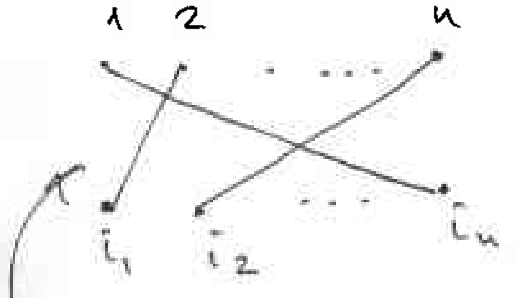
$$g_0 := (g_1^{-1} \cdots g_{n-1}^{-1}) \tilde{C}_n$$

$\boxed{\text{Упр}}$ $\quad g_1 g_0 g_1 g_0 = g_0 g_1 g_0 g_1 = [g_2^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} \tilde{C}_n]^2$

---

4) Конечномерные фактор алгебры / группы групповой алгебры / группы кос

Симметрическая группа S_n — Алгебра Текке Hecke



i_k — попарно различны и все $\in \{1, 2, \ldots n\}$

картинка: $i_1 = 2$, $i_2 = n$, $i_n = 1$

Элементарные перестановки

$s_i =$  $\quad s_i^2 = id =$  $\Leftrightarrow s_i = s_i^{-1}$

$\boxed{Y}$ S_n — фактор-группа B_n по соотношениям

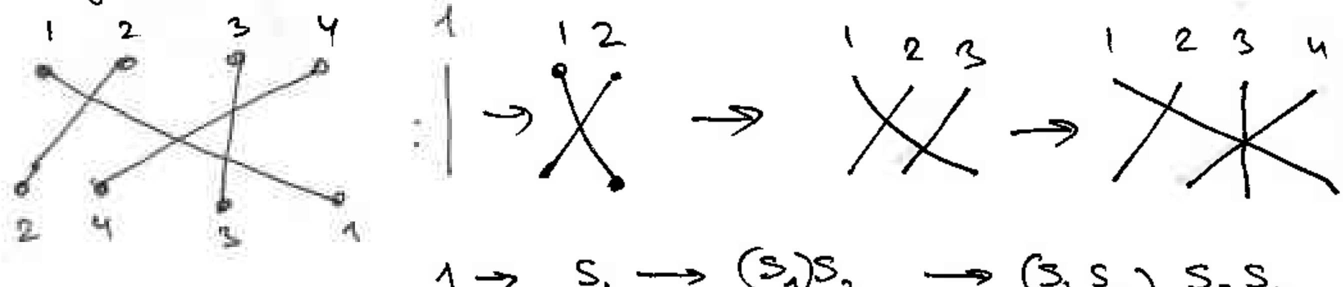
$s_i^2 = 1$ (достаточно написать $s_1^2 = 1$)

Упр: доказать это

5) Лин базис в $\mathbb{C}[S_n]$

$\boxed{Y}$ $\# S_n = \dim \mathbb{C}[S_n] = n!$ — число перестановок n объектов

Индуктивное построение лин. базиса:



$1 \to s_1 \to (s_1) s_2 \to (s_1 s_2) \underline{s_3 s_2}$

это циклы перемещающие старший элемент и не меняющие взаимного порядка остальных

группа	S_1	S_2	S_3	…	S_k
циклы	(1)	$\begin{pmatrix} s_1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_2 s_1 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} s_{k-1}\dots s_2 s_1 \\ s_{k-1}\dots s_2 \\ \vdots \\ s_{k-1} s_{k-2} \\ s_{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ ← $C_{k\to 1}$

Линейный базис:

$$\pi^{(k)}_{i_1\dots i_k} = C_{1 i_1}\, C_{2 i_2}\, C_{3 i_3} \dots C_{k i_k} \qquad i_j = 1,\dots i$$

$$\#\{\pi^{(k)}\} = k!$$

Особенность этого базиса:

$$\forall\ \pi^{(k)} \text{ имеет вид } \pi^{(k-1)} s_{k-1} C_{k-1\to i_k}$$

тоже $\pi'^{(k-1)}$

если есть

Итак: $\begin{cases} s_{k-1} \text{ встречается не более 1 раза} \\ s_{k-2} \text{ — не более 2 раз} \\ \vdots \\ s_1 \text{ — не более } k-1 \text{ раз} \end{cases}$

Элемент максимальной длины

$$\Theta_n = s_1 (s_2 s_1) \dots (s_{n-1} \dots s_2 s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Длина элемента — количество s-ов в его мономе

$$\Theta_n^2 = Z_n = 1$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Вид базиса очень отличается от ~~…~~ упорядоченного базиса в обычной квант. механике $\hat{a}, \hat{a}^+$ или $\hat{x}, \hat{p}$

Это эффект braid relations | $\boxed{\text{Упр}}$: Доказать что $\forall$ элемент S_n сводится к этому базису

6) <u>Коммутативный набор JM</u> Алгебра Гекке $H_n(q)$

$J_i = 1$ – тривиализовались. Плохо!

<u>Деформация снимает вырождение</u>

$H_n(q)$: σ_i, $i=1\dots n-1$: $\sigma_i^2 = 1 + (q-q^{-1})\sigma_i$

или

условие Гекке $\boxed{(\sigma_i - q1)(\sigma_i + q^{-1}1) = 0}$

* $H_n(1) = \mathbb{C}[S_n]$
* $\dim H_n = n!$
* <u>Линейный базис</u> в $H_n(q)$ – тот же, что и в S_n
  только правила перемножения меняются
* <u>Более того</u>:

  $H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n]$ за исключением некоих спец. значений q (увидим)

7) <u>Набор JM</u>:

$J_1 = 1 \quad J_2 = \sigma_1^2 = 1 + \lambda\sigma_1$, $\lambda = (q-q^{-1})$

$J_3 = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 = 1 + \lambda(\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1\sigma_2)$

$\dots$

<u>Упр. досчитать дальше</u>

Это будет методом неоднородной конечномерной факторизации B_n $\Rightarrow$ Набор JM коммутат. Нас волнуют только соотн. в нем!

$\boxed{\text{У}}$ Набор полиномов $\frac{J_i - 1}{\lambda}$ – это и есть исходный набор элементов JM в S_n

Но набор J_i – <u>мультипликативней удобней</u>!

Естественней сделать все в $H_n(q)$, а затем устроить предел $\underline{q \to 1}$ | Это и будем делать

Зан Общие алгебры Гекке и группы Коксетера 8

Figure 1.

Connected Coxeter graphs of finite Coxeter groups.