Бэггер, Ламберт, hep-th/0611108, 0711.0955

$X^I, \quad \psi^A$

$\delta X^I = i \bar{\varepsilon}^{\dot{A}} \Gamma^I_{\dot{A}A} \psi^A$

полностью антисимм.

$\delta \psi_A = -\gamma^\mu \partial_\mu X^I \Gamma^I_{A\dot{A}} \varepsilon^{\dot{A}} \Big| + i \cancel{k} [X^I, X^J, X^K] F^{[IJK]}_{A\dot{A}} \varepsilon^{\dot{A}}$

$\frac{1}{L^{1/2}} \quad \frac{1}{L^{1/2}} \quad \frac{1}{L^{1/2}}$

Из треб. $SO(8)$ инв.

X^I и ψ_A прин. значения в некоторой алгебре

1) X^I, ψ_A – в Lie Алгебре $U(N) \longrightarrow$

$[X^I, X^J, X^K] = \frac{1}{3!}[[X^I, X^J], X^K]$ + цикл $= 0$, т.к. это тождество Якоби!

(1

След. возможность — считать, что X^I, ψ^A в <u>неассоциативной алгебре</u>

$$\langle X^I, X^J, X^K\rangle = (X^I\cdot X^J)\cdot X^K - X^I\cdot(X^J\cdot X^K) \neq 0$$

ассоциатор

$$[X^I, X^J, X^K] \equiv \frac{1}{2\cdot 3!}\langle X^{[I} X^J X^{K]}\rangle$$

Что будет в замыкании?

Вероятно — трансляции + единые калибр. преобр-ия для всех компонент) по <u>модулю</u> <u>уравнений движения</u>.

$$[\delta_1, \delta_2] X^I = 2i(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2) \partial_\mu X^I +$$

$$+ 6 \varkappa\, \bar{\varepsilon}_1^{\dot{A}} \Gamma^{[JK]}_{\dot{A}\dot{B}}\, \varepsilon_2^{\dot{B}} [X^I, X^J, X^K]$$

то же получаем и для $[\delta_1, \delta_2] \Psi^I$, если выполняется уравнение движения

$$\boxed{\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{9 i \varkappa}{4} \Gamma^{IJ} [X^I, X^J, \Psi] = 0}$$

Т.е. всегда 3-браннулы + некоторые преобразования типа калибровочных. Частн. случай бранного преобр-ия

$$\delta X = [\alpha, \beta, X], \quad \alpha, \beta \subset A$$

▽ Правило Лейбница

$$\delta [X, Y, Z] = [\delta X, Y, Z] + [X, \delta Y, Z] + [X, Y, \delta Z] \longrightarrow$$

трев. чеса

$$[\alpha, \beta, [X, Y, Z]] = [[\alpha, \beta, X], Y, Z] + [X, [\alpha, \beta, Y], Z] + [X, Y, [\alpha, \beta, Z]]$$

(аналогично, об. т. Якоби при $\delta X = [\alpha, X]$ следует из прав. Лейбница для коммутатора

$$\delta [Y, Z] = [[\alpha, Y], Z] + [Y, [\alpha, Z]] = [\alpha, [Y, Z]]$$

)

6

"Фундамент. тождество"

Опред. что $X = X_a T^a$, $a = 1, \dots N$

$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}{}_d \, T^d$,

$h^{ab} = \mathrm{Tr}(T^a, T^b)$

Фунд. тождество ведёт к

$$\boxed{f^{efg}{}_d \, f^{abc}{}_g \equiv f^{efa}{}_g f^{bcg}{}_d + f^{efb}{}_g f^{cag}{}_d + f^{efc}{}_g f^{abg}{}_d}$$

аналог тожд. Якоби для об. структ. констант

$\delta X_d = f^{abc}{}_d \, \alpha_a \beta_b X_c \longrightarrow$

$\boxed{\delta X_d = f^{abc}{}_d \, \Lambda_{ab} X_c} \equiv \tilde{\Lambda}^c{}_d X_c$ (5

6

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu X^I \partial^\mu X^I\right) - 3\varkappa^2 \mathrm{Tr}\left([X^I, X^J, X^K], [X^I, X^J, X^K]\right)$$

инвариантен

калибрование

$$\boxed{\tilde{A}_\mu{}^b{}_a \equiv f^{cdb}{}_a A_{\mu cd}}$$

$$(D_\mu X)_a = \partial_\mu X_a - \tilde{A}_\mu{}^b{}_a X_b$$

$$\delta \tilde{A}_\mu{}^b{}_a = \partial_\mu \tilde{\Lambda}^b{}_a - \tilde{\Lambda}^b{}_c \tilde{A}_\mu{}^c{}_a + \tilde{A}_\mu{}^b{}_c \tilde{\Lambda}^c{}_a$$

$$[D_\mu, D_\nu] X = F_{\mu\nu} X$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu \tilde{A}_\mu{}^b{}_a - \partial_\mu \tilde{A}_\nu{}^b{}_a - \tilde{A}_\mu{}^b{}_c \tilde{A}_\nu{}^c{}_a + \tilde{A}_\nu{}^b{}_c \tilde{A}_\mu{}^c{}_a$$

$\tilde{\Lambda}^b{}_a = N \times N$ матриц $\in SO(N)$ – (алгебра вещественн.)

$\tilde{A}_\mu{}^b{}_a$ – такие [функц. отinduce]

Суперсимметрия:

$$\Gamma^{[IJK]}\varepsilon$$

$$\begin{cases}
\delta X_a^I = i\,\bar{\varepsilon}\,\Gamma^I \Psi_a \\
\delta \Psi_a = D_\mu X_a^I \gamma^\mu \Gamma^I \varepsilon + \varkappa f^{bcd}{}_a X_b^I X_c^J X_d^K \cancel{\varepsilon}_a \\
\delta \hat{A}_\mu{}^b{}_a = i\,\bar{\varepsilon}^{\dot{A}} \gamma_\mu \Gamma^I_{\dot{A}A} X_c^I \Psi_d^A f^{cdb}{}_a
\end{cases}$$

$\varkappa = -\frac{1}{6}$ для замыкания!

Замыкается правильно на всех полях (с точн. до кал. преобр. и с уч. ур. движ.) с учётом и фунд. тождества!

Инв. лагранжиан

$$\mathcal{L} = +\frac{1}{2}\left(D_\mu X^{aI} D^\mu X_a^I\right) + \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}^a \gamma^\mu D_\mu \Psi_a\right)$$

$$+ \frac{i}{4} \bar{\Psi}_b \Gamma_{[IJ]} X_c^I X_d^J \Psi_a f^{abcd}$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \Big(f^{abcd} A_{\mu ab} \partial_\nu A_{\lambda cd} +$$

$$+ \frac{2}{3} f^{cda}{}_g f^{efgb} A_{\mu ab} A_{\nu cd} A_{\lambda ef} \Big)$$

$$- V$$

$$V = \frac{1}{2 \cdot 3!} \mathrm{Tr}\left([X^I, X^J, X^K], [X^I, X^J, X^K] \right)$$

Пример.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{I} + i\gamma_5\right),$$

$$Q^2 = \frac{1}{2}\{\underline{I} - \underline{I} + 2i\gamma_5 = i\gamma_5$$

$$A \cdot B = Q\, A\, B\, Q$$

$$\gamma^a \cdot \gamma^b = Q\, \gamma^a \cdot \gamma^b\, Q = \gamma_5\, \gamma^a \gamma^b$$

$$\langle A, B, C\rangle = (\gamma^a \cdot \gamma^b) \cdot \gamma^c - \gamma^a \cdot (\gamma^b \cdot \gamma^c)$$

$$= 2i\, \gamma^5\, \gamma^a \gamma^b \gamma^c$$

$$\langle \gamma^{[a}, \gamma^b, \gamma^{c]}\rangle = 2i\, \gamma_5\, \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} = 2i\varepsilon^{abcd}\gamma_d$$

$$\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]} = \varepsilon^{abcd}\gamma_5\gamma_d$$

В $SO(4)$ случае

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Big[\varepsilon^{abcd} A_{\mu ab}\partial_\nu A_{\lambda cd} +$$

$$+ \frac{2}{3}\varepsilon^{cdag}\varepsilon^{efgb} A_{\mu ab} A_{\nu cd} A_{\lambda ef}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Big\{2 A^{+}_{\mu ab}\partial_\nu A^{+}_{\lambda ab} - 2 A^{-}_{\mu ab}\partial_\nu A^{-}_{\lambda ab}$$

$$+ \frac{8}{3}\big\{ A^{+}_{\mu ab} A^{+}_{\nu ag} A^{+}_{\lambda gb} + A^{-}_{\mu ab} A^{-}_{\nu ag} A^{-}_{\lambda g\cdot}$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Big\{\Big[A^{+}_{\mu ab}\partial_\nu A^{+}_{\lambda ab} + \frac{4}{3} A^{+}_{\mu ab} A^{+}_{\nu ag} A^{+}_{\lambda gb}\Big]$$

$$- \Big[\hat{A}^{-}_{\mu ab}\partial_\nu \hat{A}^{-}_{\lambda ab} + \frac{4}{3}\hat{A}^{-}_{\mu ab}\hat{A}^{-}_{\nu ag}\hat{A}^{-}_{\lambda gb}\Big]$$

2 $SU(2)$ CS теории

$$\Pi^{\pm}_{ab\,cd} = \frac{1}{4}\left[(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{bc}\delta_{ad}) \pm \varepsilon_{abcd}\right]$$

$$\Pi^{\pm\,2} = \Pi^{\pm}\ ,\quad \Pi^{+}\Pi^{-} = 0\ ,\quad \Pi^{+} + \Pi^{-} = \mathbb{I}$$

$$\boxed{A_{\mu ab} = A^{+}_{\mu ab} + A^{-}_{\mu ab}}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(\varepsilon^{abcd} A_{\mu ab}\,\partial_\nu A_{\lambda cd} + \frac{2}{3}\right.$$

$$\boxed{\varepsilon^{\ a}_{ab\,cd} A_{\mu ab} = 2\left(A^{+}_{\mu ab} - A^{-}_{\mu ab}\right)}$$

$$A_{\mu ab} = \Pi^{+} A_\mu + \Pi^{-} A_\mu$$

$$\varepsilon^{abcd}\, \Pi^{+}_{ab\,a'b'}\, \Pi^{+}_{cd\,c'd'} \qquad A_{a'b'}\,\partial_\nu A_{\lambda c'd'}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{2\,\varepsilon_{cd\,a'b'} + 2\left(\delta_{ca'}\delta_{db'} - \right)\right]\, \Pi^{+}_{cd\,c'd'}$$

$$= 2\quad \Pi^{+}_{cd\,a'b'}\, \Pi^{+}_{cd\,c'd'}\, A_{\mu a'b'}\,\partial_\nu A_{\lambda c'd'}$$

$$= 2\quad \Pi^{+}_{a'b'\,c'd'}\, A_{\mu\,a'b'}\,\partial A_\lambda$$

Дальнейшие развития

1) Лоренцевы 3-алгебры (0805.1087)

$$f^{+\alpha\beta}{}_{\gamma} = -f^{\alpha+\beta}{}_{\gamma} = f^{\alpha\beta+}{}_{\gamma} = f^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$$

$$f^{\alpha\beta\gamma}{}_{-} = f^{\alpha\beta\gamma}$$

$$h^{ab} = \mathrm{Tr} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{h_{\sigma}} \end{pmatrix}$$

$$(A_\mu)_\alpha = A_{\mu+\alpha} \qquad B_{\mu\alpha} = (A_\mu)_{\beta\gamma} f^{\beta\gamma}{}_{\alpha}$$

$$S_{CS} = \int d^3x \; \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \, \mathrm{Tr}\left[B_\lambda \left(\partial_\mu A_\nu - [A_\mu, A_\nu]\right)\right]$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda - 2[A_\mu, \Lambda]$$

$$\delta B_\mu = \partial_\mu M - 2[A_\mu, M] - 2[B_\mu, \Lambda]$$

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\partial_\mu X^I \partial^\mu X^I \right) - \partial_\mu X_+^I \partial_\mu X_-^I$$

госты!

Проблемы! Устранение гостов

→ к D2 теории!

г) $N = 6$ CS – материя, 0806.121

$U(N) \times U(N)$ или $SO(N) \times SO(N)$

[illegible] [illegible], би-фундаментальная материя

N M2 – бран!

(12